

**XVII Międzynarodowe Mistrzostwa
w Grach Matematycznych i Logicznych
I Mistrzostwa Polski w GMiL**

Finał krajowy 18 maja 2003

- CE** : zadania o numerach od **1** do **5**; czas - **60** minut
CM : zadania o numerach od **3** do **8**; czas - **90** minut
C1 : zadania o numerach od **5** do **11**; czas - **120** minut
C2 : zadania o numerach od **7** do **13**; czas - **180** minut
L1 i GP: zadania o numerach od **7** do **16**; czas - **180** min.
L2 i HC: zadania o numerach od **7** do **18**; czas - **180** min.

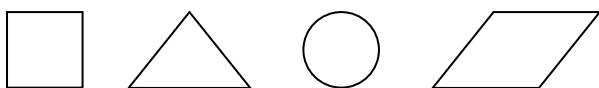
WAŻNE !!! Wyniki liczbowe należy wpisać w odpowiedniej ramce KARTY ODPOWIEDZI.

Kartę wypełniać czytelnie, bez skreśleń i poprawek.

ZADANIA

POCZĄTEK KATEGORII CE

1 – W każdą z czterech figur należy wpisać jedną z liczb 9, 18, 64, 333 tak, aby w kwadracie nie znalazła się ani liczba

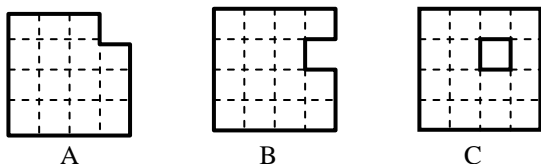


trzycyfrowa ani liczba podzielna przez 4. Liczba będąca kwadratem liczby całkowitej winna znaleźć się w kole, a każdą liczbę dwucyfrową należy wpisać w figurę czworoboczną.

2 - Wiek mojej babci, wyrażony w latach, jest liczbą dwucyfrową, parzystą i podzielną przez 3. Jeżeli przestawimy cyfry w liczbie lat babci, to odmładzamy ją o 36 lat. **Ile lat ma moja babcia?**

POCZĄTEK KATEGORII CM

3 – Figurę A należy podzielić na 2 części tak, aby z tych części



dało się złożyć figurę B, a także - z tych samych 2 części – dało się złożyć figurę C.

W Karcie Odpowiedzi linie podziału zaznacz pogrubioną linią.

4 – W dniu dzisiejszym, tj. 18 maja 2003 małpka, ale również jej matka, obchodzą swoje urodziny. W tym dniu łączny wiek małpki i jej matki wynosi 30 lat, a ponadto wiek małpki jest równy połowie wieku, który będzie miała jej matka, gdy małpka będzie miała obecny wiek swojej matki. **Które urodziny obchodzi dziś małpka?**

POCZĄTEK KATEGORII C1

5 – Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która dzieli się przez 13, która ma sumę cyfr równą 13 i w której dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę dwucyfrową 13.

KONIEC KATEGORII CE

6 – Szkic planu pewnego fragmentu miasta, pokazanego na rysunku, obejmuje 7 skrzyżowań A, B, C, D, E, F i G oraz 11 odcinków ulic. Strażnik miejski patroluje ulice tej części miasta rozpoczynając obchód od skrzyżowania A, ma obowiązek przejść każdą ulicę co najmniej jeden raz i powrócić do skrzyżowania

A. Przy każdym odcinku znajduje się liczba określająca czas, podany w minutach, potrzebny do przejścia tego odcinka. Strażnik zna dobrze plan miasta i wybiera trasę tak, aby łączny czas obchodu był najkrótszy. **Jaki jest najkrótszy czas obchodu?** Wynik podać w minutach.

POCZĄTEK KATEGORII C2, L1, L2, GP, HC

7 – W koszu jest 16 owoców. Są tam jabłka, gruszki i pomarańcze. Pomarańcz jest co najmniej tyle ile jabłek, a jabłek jest więcej niż gruszek. Jeżeli z tego kosza wybierzemy losowo 9 owoców, to wśród owoców wybranych zawsze będą owoce co najmniej dwóch rodzajów. Gdybyśmy zaś, zamiast 9, wybrali 14 owoców, to wśród owoców wybranych zawsze będą owoce wszystkich trzech rodzajów. **Ile w tym koszu mogło być pomarańcz, ile jabłek, a ile gruszek?** Jeżeli jest więcej niż jedno rozwiązanie, to podać liczbę rozwiązań oraz to rozwiązanie, w którym liczba pomarańcz jest największa.

8 – Agata ma całe pudło kartoników z cyframi 1, 2 i 3. Układa z nich liczby wielocyfrowe o następującej własności: „wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone z kolejnych dwóch cyfr takiej liczby są różne”. Ułożyła m.in. liczbę 231121, w której liczby dwucyfrowe: 23, 31, 11, 12 i 21 są rzeczywiście różne. **Ile cyfr miała największa liczba, którą mogła ułożyć Agata?** W Karcie Odpowiedzi podaj również 5 ostatnich cyfr tej największej liczby wypisując je w tej samej kolejności, w jakiej występują one w liczbie Agaty.

KONIEC KATEGORII CM

9 - Znaleźć trzy kolejne liczby całkowite dodatnie, z których najmniejsza ma sumę cyfr podzielną przez 5, pośrednia ma sumę cyfr podzielną przez 4, a największa ma sumę cyfr podzielną przez 3. W Karcie Odpowiedzi podać te liczby w kolejności rosnącej.

10 – Zosia napisała na tablicy 8 liczb dwucyfrowych, z których każda, przy dzieleniu przez 8, dawała inną resztę i wykorzystwała do tego najmniejszą z możliwych liczbę różnych cyfr. **Ile wykorzystwała różnych cyfr i jaka mogła być najmniejsza suma wszystkich szesnastu cyfr w tych ośmiu liczbach?**

11 – Ania napisała ułamek nieskracalny $\frac{10}{97}$. Może zmieniać

wartość tego ułamka i zapisać wynik w postaci ułamka nieskracalnego stosując, w odpowiedniej kolejności, następujące operacje:

- 1) może do licznika i mianownika dodać równocześnie dowolną, ale taką samą liczbę całkowitą dodatnią,
- 2) może licznik i mianownik pomnożyć przez dowolną, ale taką samą liczbę całkowitą dodatnią,
- 3) może uprościć otrzymany ułamek doprowadzając go do ułamka nieskracalnego.

Jaką najmniejszą liczbą tego typu operacji można ułamek

$\frac{10}{97}$ **zamienić na:** a) ułamek $\frac{1}{4}$, b) ułamek $\frac{1}{3}$?

KONIEC KATEGORII C1

12 – Na haku, u sufitu, na wysokości 3 metrów, zaczepiona jest lina, której długość, po obu stronach haka, jest taka sama. 1 metr liny waży 300 gramów. Na jednym końcu liny zaczepiła się małpka, która trzyma w łapce banana, zaś na drugim końcu liny zaczepiono przeciwwagę równą wadze małpki. 1 cm banana waży 10 gramów. Długość całkowita liny, w metrach, stanowi $\frac{1}{3}$ wieku małpki, wyrażonego w latach, a waga małpki, w gramach, jest równa 200-krotnej liczbie lat matki tej małpki. Łączny wiek małpki i jej matki wynosi 30 lat. Dodając dwukrotność wagi małpki i 40-krotność wagi banana otrzymuje się ten sam rezultat, jak przy dodaniu 10-krotnej wagi liny oraz wagi użytej przeciwwagi. Wiek małpki jest równy połowie wieku, który będzie miała jej matka, gdy ona będzie miała obecny wiek swojej matki.

Podać w centymetrach długość banana i, z warunków równowagi, wyznaczyć różnicę długości odcinków liny po obu stronach haka?

Uwaga. Zaniedbujemy grubość haka.

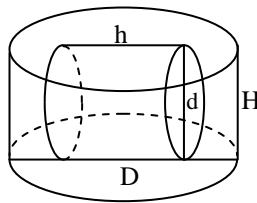
13 – Prostokąt o bokach 25 cm i 12 cm podzielono na trzy trójkąty prostokątne podobne w taki sposób, że długości boków każdego z nich były liczbami całkowitymi centymetrów. **Podaj, w kolejności rosnącej, obwody tych trzech trójkątów.**

KONIEC KATEGORII C2

14 – Poruszając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, wpisujemy na okręgu 18 liczb, niekoniecznie różnych, ale tak dobranych, żeby każde dwie liczby stojące obok siebie różniły się zawsze o jeden. Następnie otaczamy czerwonym kółkiem każdą liczbę, która obok siebie ma dwie liczby od niej mniejsze, a zielonym kółkiem otaczamy każdą liczbę, która obok siebie ma dwie liczby od niej większe. Okazało się, że suma liczb otoczonych kółkami zielonymi była równa 7. **Podaj sumę liczb otoczonych kółkami czerwonymi.**

15 – Liczbę naturalną n nazywamy doskonałą, jeżeli jest ona równa sumie wszystkich swoich dzielników naturalnych mniejszych od tej liczby. Liczbą doskonałą jest np. 6, bo $6 = 1 + 2 + 3$. Znaleźć wszystkie liczby doskonałe postaci p^2q , gdzie p i q są różnymi liczbami pierwszymi.

16 – Mówimy, że walec $W(d, h)$ o średnicy d i wysokości h jest wpisany w walec $W(D, H)$, jeśli osie obu walców są prostopadłe, $d = H$ oraz h jest liczbą dodatnią i największą z możliwych.



Bierzemy walec $W(D_1, H_1)$, w którym stosunek średnicy podstawy do wysokości jest równy k , a następnie wpisujemy w ten walec nowy walec $W(D_2, H_2)$. W walec $W(D_2, H_2)$ wpisujemy kolejny walec $W(D_3, H_3)$ i proces wpisywania kolejnych walców kontynuujemy tak długo, jak długo to będzie możliwe.

1. Jaką najmniejszą wartość może mieć liczba k , jeżeli w tym procesie wpisano walec $W(D_4, H_4)$, ale nie można już wpisać kolejnego walca ?

2. Dla jakich $k = D_1/H_1$ proces wpisywania kolejnych walców jest nieskończony, tzn. że istnieje nieskończony ciąg walców $W(D_n, H_n)$, w którym $W(D_{n+1}, H_{n+1})$ jest wpisany w $W(D_n, H_n)$, $n = 1, 2, \dots$?

Uwaga. Rozważamy tu tylko walce, które mają dodatnie średnice i dodatnie wysokości.

KONIEC KATEGORII L1 i GP

17 – Jaką największą liczbę punktów można wybrać w przestrzeni R^3 , aby każde trzy z tych punktów tworzyły trójkąt ostrokątny lub co najwyżej prostokątny ?

18 – Na płaszczyźnie dany jest zbiór Z_0 złożony z n punktów nie leżących na jednej prostej, $n \geq 3$. Ze zbioru Z_0 wybieramy dwa punkty tak, aby odcinek łączący te punkty nie zawierał, oprócz końców, żadnych innych punktów zbioru Z_0 . Rysujemy ten odcinek i otrzymujemy zbiór Z_1 złożony z punktów zbioru Z_0 i dorysowanego odcinka. Operację taką powtarzamy i otrzymujemy kolejno zbiory Z_2, Z_3, \dots, Z_m , przy czym w k -tym kroku, $k = 2, \dots, m$, wybieramy dwa punkty ze zbioru Z_0 jeszcze nie połączone odcinkiem i takie, że odcinek łączący te punkty, oprócz wybranych punktów, nie ma ze zbiorem Z_{k-1} żadnych innych punktów wspólnych. Odcinek ten dołączamy do zbioru Z_{k-1} i otrzymujemy zbiór Z_k . Proces kończymy, gdy otrzymamy zbiór Z_m , do którego nie można dołączyć żadnego dodatkowego odcinka. **Jaką najmniejszą i jaką największą wartość może mieć liczba m ?**

KONIEC KATEGORII L2 i HC

POWODZENIA !