

XVII Międzynarodowe Mistrzostwa w Grach Matematycznych i Logicznych

I Mistrzostwa Polski w GMiL

– Drugi etap 2002/2003

Poniżej zamieszczamy 18 zadań drugiego, korespondencyjnego etapu Mistrzostw.

Po rozwiązaniu zadań otrzymane wyniki liczbowe i graficzne należy wpisać w odpowiedniej ramce Karty Odpowiedzi formatu A4. Starannie wypełnioną kartę odpowiedzi według podanego wzoru należy przesłać pocztą zwykłą do dnia **31 marca 2003 r.** na adres: **Wydział Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław** z dopiskiem na kopercie hasła **"Konkurs"** i symbolu kategorii, podając również swój adres zwrotny wraz z czytelnie napisanym imieniem i nazwiskiem. Liczy się data stempla pocztowego. Do przesyłki należy obowiązkowo włożyć zaadresowaną zwrotnie kopertę z naklejonym właściwym znaczkiem pocztowym i kserokopię dowodu wpłaty wpisowego (kategorie CE i CM - 20 zł, C1 i C2 - 30 zł, L1 i L2 - 40 zł, HC i GP - 50 zł) na konto: **Politechnika Wroclawska, 50-370 Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, Bank Zachodni WBK S.A. 2 Oddział Wrocław, Nr 37 1090 2402 0000 0006 1000 0434, zlecenie 451037.**

W Karcie obowiązkowo należy podać imię i nazwisko, dokładny adres zamieszkania, a uczniowie muszą podać klasę, nazwę i numer szkoły oraz miejscowość. Kartę należy wypełnić pismem drukowanym długopisem lub piórem, cyfry muszą być wyraźne i ewentualne rysunki staranne. Karty wypełnione niestarannie, trudne do jednoznacznego odczytu nie będą sprawdzane i, tym samym, zawodnik nie będzie mógł uczestniczyć w następnych etapach Mistrzostw.

Teksty zadań drugiego etapu, wzór Karty Odpowiedzi oraz dodatkowe informacje można znaleźć na stronie internetowej Komitetu Organizacyjnego Mistrzostw:

<http://www.im.pwr.wroc.pl/~rabczuk/gry.html>

Zestaw zadań drugiego etapu eliminacji

POCZĄTEK KATEGORII CE

1 – Kuba pisze, w pewnej kolejności, liczby całkowite według własnego systemu, a Agata odgaduje jaki jest ten system. Gdy Kuba napisał dziesięć pierwszych liczb

1, 1, 2, 3, 3, 7, 4, 15, 5, 31, ...

to Agata powiedziała z uśmiechem – „Już znam twój system” – i szybko napisała następne dziesięć liczb ciągu Kuby. **Podaj dwie ostatnie liczby napisane przez Agatę.**

2 - Ania, Beata, Ewa, Ola i Sylwia wybierają się autobusem na wycieczkę i utworzyły kolejkę przed pustą kasą biletową. Ola stała bliżej kasy niż Beata, ale w tej kolejce znalazła się za Sylwią. Ania i Sylwia nie stały obok siebie. Ewa nie stała obok Sylwii, ani obok Oli, ani obok Ani. **W jakiej kolejności dziewczynki te ustawiły się przed kasą biletową?** W Karcie Odpowiedzi wpisać tylko pierwsze litery imion dziewczynek.

POCZĄTEK KATEGORII CM

3 – Na wystawie sklepu z zabawkami ustawiono rząd pluszowych przytulaneł. Były tam misie, pięć kotków i dwa hipopotamy. Każdy kotek w tym rządzie przytulał się do dwóch misiów, a każdy miś miał z jednej strony kotka, a z drugiej strony albo misia albo hipopotama. **Ile było misiów w tym rządzie przytulaneł?**

4 – Beata napisała 10 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, z których każda miała sumę cyfr niepodzielną przez 7. Najmniejsza z tych dziesięciu liczb była liczbą dwucyfrową. **Jaka to była liczba?**

POCZĄTEK KATEGORII C1

5 – Na białym papierze rysujemy prostokąt i dzielimy go na 30 jednakowych pól kwadratowych. Trzy pola, wskazane na rysunku obok, malujemy na kolor zielony Z, a niektóre białe pola malujemy na kolor czarny C. Pola do zamalowania na czarno wybieramy tak, aby każde pole białe i każde pole zielone, a także każde pole czarne miało co najmniej jednego sąsiada koloru czarnego. Przyjmujemy, że dwa pola sąsiadują, gdy mają wspólny bok. **Jaką najmniejszą liczbę białych pól trzeba pomalować na czarno, aby spełnione były wyżej podane warunki?** W Karcie Odpowiedzi należy podać tę liczbę oraz trzy różne przykłady rozmieszczenia czarnych pól C.

	Z			Z	
		Z			

KONIEC KATEGORII CE

6 – W klasie Tomka grzecznych dzieci jest trzykrotnie więcej niż niegrzecznych. Natomiast grupa złożona z grzecznych dziewczynek i niegrzecznych chłopców jest dwukrotnie liczniejsza od grupy złożonej z grzecznych chłopców i niegrzecznych dziewczynek. Wszystkich chłopców w tej klasie jest tylu ile jest grzecznych dziewczynek. **Ilu chłopców jest w tej klasie, jeżeli wiadomo, że klasa ta liczy nie więcej niż 40 uczniów?**

POCZĄTEK KATEGORII C2, L1, L2, GP, HC

7 – Nauczyciel polecił Jankowi, aby z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 utworzył trzy liczby trzycyfrowe wykorzystując każdą z podanych cyfr dokładnie jeden raz. Janek napisał trzy takie liczby, a następnie obliczył ich sumę, która okazała się liczbą palindromiczną. **Jaka to była liczba palindromiczna?** Liczba jest palindromem, jeżeli napisana jest układem symetrycznym cyfr, jak np. liczby: 121, 2002, 3773, 12021.

8 – Jednoosobowa gra koniem szachowym odbywa się na planszy kwadratowej 11×11 podzielonej na 121 pól kwadratowych. W tej grze ruchy wykonuje się jednym koniem szachowym, tak jak w grze w szachy. W grze obowiązują następujące reguły:

1^o W trakcie gry koń nie może znaleźć się dwukrotnie na tym samym polu planszy i nie może powrócić na pole, z którego rozpoczynała się gra,

2^o Gry nie wolno przerwać, jeżeli możliwy jest jeszcze do wykonania następny ruch.

Druga reguła oznacza, że gra kończy się tylko wtedy, gdy nie może być kontynuowana zgodnie z pierwszą regułą. Mistrzem w tej grze zostaje ten, kto startując z dowolnie wybranej pozycji początkowej, potrafi zawsze zakończyć grę minimalną liczbą ruchów. **Po ilu ruchach mistrz zakończy grę, jeżeli rozpocznie ją koniem ustawionym na polu A11, tzn. na lewym górnym polu planszy?** W Karcie Odpowiedzi podać liczbę ruchów wykonanych przez mistrza i oznaczyć te pola, na których może on zakończyć grę używając symboli, np. G7, A3, K10.

11											
10											
9											
8											
7											
6											
5											
4											
3											
2											
1											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

KONIEC KATEGORII CM

9 - Do ścisłego finału konkursu matematycznego Jury zakwalifikowało 3 uczniów. Każdy z nich otrzymał taki sam zestaw 16 zadań. Regulamin konkursu ustala, że za prawidłowe rozwiązanie każdego z tych zadań uczeń otrzymuje 8 punktów, za nietknięte lub tylko częściowo rozwiązane zadanie otrzymuje 0 punktów, a za każde błędnie rozwiązane zadanie uczeń otrzymuje 5 punktów karnych, które odejmuje się od sumy punktów uzyskanych za prawidłowo rozwiązane zadania. Każdy z uczestników finału miał taką samą liczbę błędnie rozwiązanych zadań, ale każdy z nich miał inną liczbę zadań rozwiązanych prawidłowo. Po odjęciu punktów karnych cała trójka miała łącznie 149 punktów. **Ile zadań każdy z nich rozwiązał prawidłowo?** Jeżeli możliwe są różne odpowiedzi, to należy podać wszystkie pisząc liczby w kolejności malejącej.

10 - Kwadrat o boku 10 cm podzielono linią prostą na dwie figury w taki sposób, że obwody otrzymanych figur różniły się o 8 cm, a dodatnia różnica pól tych figur była najmniejsza z możliwych. **O ile centymetrów kwadratowych różniły się pola tych dwóch figur?**

11 - Znaleźć siedem kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, których suma jest sześcianem liczby pierwszej. W Karcie Odpowiedzi podać te liczby w kolejności rosnącej.

KONIEC KATEGORII C1

12 - Ze zbioru złożonego ze wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100 wybrano możliwie najliczniejszy podzbiór tak, aby suma żadnych dwóch liczb tego podzbioru nie dzieliła się przez ich różnicę. **Ile liczb było w tym podzbiorze?**

13 - Dwa papierowe kwadraty o polach 9 cm^2 i 4 cm^2 należy podzielić na możliwie najmniejszą liczbę wielokątów tak, aby można było złożyć z nich kwadrat o polu 13 cm^2 . W Karcie Odpowiedzi narysować dokładnie linie podziału obu kwadratów zaznaczając liczbowo długości tych boków otrzymanych wielokątów, które leżą na bokach dzielonych kwadratów.

KONIEC KATEGORII C2

14 - Liczbę $\frac{1}{6}$ rozkładamy na sumę sześciu ułamków

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}$$

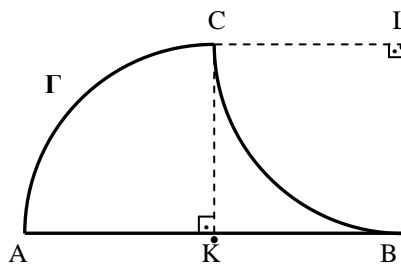
o mianownikach naturalnych parami różnych i spośród wszystkich takich rozkładów wybieramy ten, w którym suma mianowników jest najmniejsza. **Podać, w kolejności rosnącej, mianowniki wybranego rozkładu.**

15 - Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia

$$W = \sqrt{(x-y)^2 + y^2} + \sqrt{(y-u)^2 + (8-y)^2} + \sqrt{u^2 + (8-x)^2}$$

gdzie x, y, u są liczbami rzeczywistymi. W Karcie Odpowiedzi podać też liczby x, y oraz u , dla których W osiąga najmniejszą wartość.

16 - Mówimy, że czworokąt jest wpisany w krzywą Γ , jeżeli wszystkie wierzchołki tego czworokąta leżą na krzywej Γ . **Ile kwadratów można wpisać w krzywą zamkniętą Γ złożoną z dwóch łuków okręgów o promieniu $R = 1 \text{ m}$ oraz odcinka AB o długości 2 m ?**



Na rysunku obok pokazana jest krzywa Γ w zmniejszonej skali;

$$|AK| = |KB| = |KC| = |BL| = R.$$

W Karcie Odpowiedzi podać liczbę wpisanych kwadratów oraz długości boków tych kwadratów. Wyniki podać w milimetrach zaokrąglone do milimetra.

KONIEC KATEGORII L1 i GP

17 - Znaleźć największą liczbę M taką, że nierówność

$$n \{n \sqrt{2}\} \geq M$$

jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

$\{x\} = x - [x]$ oznacza część ułamkową liczby x .

18 - Obliczyć promień największego okręgu leżącego na powierzchni

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16.$$

KONIEC KATEGORII L2 i HC

POWODZENIA !