

# Finał XXI Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych,

## 18.05.2025

- CE** uczniowie klasy III SP lub młodsi  
**CM** uczniowie klas IV oraz V SP  
**C1** uczniowie klas VI oraz VII SP  
**C2** uczniowie klasy VIII SP i klasy pierwszej szkół średnich  
**L1** pozostali uczniowie szkół średnich  
**L2** studenci kierunków ścisłych, urodzeni nie wcześniej niż w roku 1995  
**HC**
  - osoby zawodowo zajmujące się matematyką, w szczególności pracownicy naukowi szkół wyższych, placówek naukowo-badawczych,
  - uczestnicy konkursu głównego finału międzynarodowego w kategorii GP lub HC, przez dwie kolejne edycje**GP** dorośli nie występujący w kategorii L2 oraz HC, w tym uczniowie szkół pomaturalnych.

### Początek wszystkich kategorii

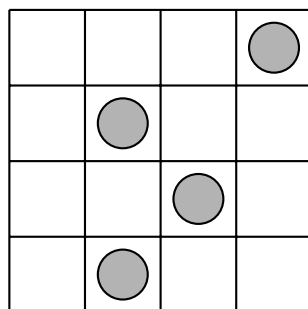
#### 1. Bierki

Artur i Bruno grają w bierki. Gra polega na zbieraniu kolejnych pojedynczych patyczków rzuconych na stos tak, aby nie poruszyć pozostałych patyczków w stosie. Każdy poprawnie zabrany patyczek, w zależności od kształtu, warty jest odpowiednią liczbę punktów. Zestaw bierek składa się z trzech trójkątów, trzech harpunów, trzech wiosł, trzech bosaków i 24 oszczepów. Każdy trójkąt jest warty 25 punktów, każdy harpun – 15, wiosło – 10, bosak – 5 punktów. Każdy oszczep jest warty jeden punkt. Po skończonej grze, gdy chłopcy zebrali wszystkie bierki ze stosu okazało się, że Bruno wygrał z Arturem.

**Maksymalnie ile patyczków mógł zebrać Artur?**

#### 2. Zakazane linie

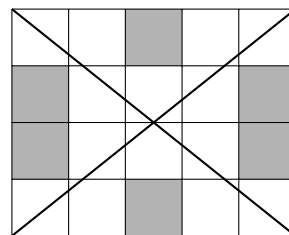
Na polach kwadratowej planszy  $4 \times 4$  Leon ustawił cztery pionki jak na diagramie. Na jednym z wolnych pól chłopiec chce ustawić jeszcze jeden pionek tak, aby żadne trzy pionki nie zajmowały pól, których środki leżą w linii prostej.



**Ile pól do dyspozycji ma Leon, aby spełnić ten warunek?**

#### 3. Tnące przekątne

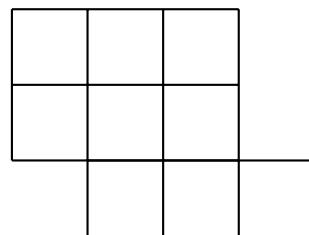
Prostokąt o wymiarach  $4 \times 5$  podzielono na jednostkowe kwadraty. Przekątne prostokąta nie przecinają sześciu zaznaczonych na szaro kwadratów, jak na rysunku.



**Ile jednostkowych kwadratów nie będzie przeciętych żadną przekątną w prostokącie  $8 \times 10$  podzielonym na jednostkowe kwadraty?**

#### 4. Trzy z dziewięciu

Z przedstawionego rysunku chcemy wybrać trzy z dziewięciu kratek, tak aby każda z wybranych kratek miała wspólny bok z przynajmniej jedną z pozostałych wybranych kratek.



**Na ile sposobów można to zrobić?**

#### 5. Sprytna suma

Liczby od 1 do 25 zostały rozmieszczone w tabeli  $5 \times 5$  w następujący sposób:

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 10 | 9  | 8  | 7  | 6  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

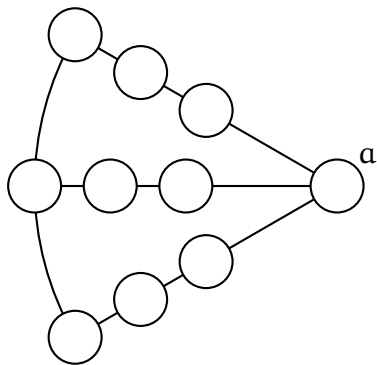
Matylda wybiera pięć z nich tak, aby w każdym wierszu i każdej kolumnie znajdowała się dokładnie jedna wybrana przez nią liczba.

**Jaka jest największa możliwa suma liczb wybranych przez Matyldę?**

**Koniec kategorii CE**

## 6. Wachlarz

Zosia chce wpisać do kółek wszystkie liczby całkowite od 0 do 9 tak, by na każdym zaznaczonym odcinku oraz łuku suma liczb w kółkach była równa 19.



Jaka liczba znajdzie się w polu oznaczonym literą  $\alpha$ ?

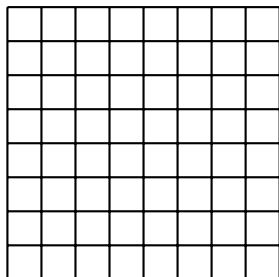
## 7. Liczby Agatki

Agatka bawi się, tworząc z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 dwie liczby. Każdej z tych cyfr używa dokładnie raz. Następnie mnoży te dwie liczby przez siebie. Na przykład tworzy liczby 123 i 45 i mnoży je dostając  $123 \cdot 45 = 5535$ . Innym razem tworzy liczby 3241 i 5, oblicza  $3241 \cdot 5$  i otrzymuje wynik większy niż poprzednio.

Jaki jest największy wynik, jaki Agatka może osiągnąć, kontynuując zabawę według tych samych zasad?

## 8. Tylko nie trójkąty

Jaka jest maksymalna liczba pionków, które można umieścić na polach szachownicy  $8 \times 8$ , w taki sposób, aby środki pól zajmowanych przez dowolne trzy pionki nie były wierzchołkami trójkąta prostokątnego?



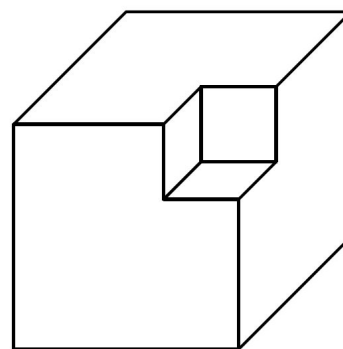
Uwaga: Każdy z pionków całkowicie mieści się w jednym polu szachownicy.

Koniec kategorii CM

*Uwaga do zadań od 9 do 18: aby zadanie było całkowicie rozwiązane należy podać liczbę jego rozwiązań i rozwiązanie, jeśli jest jedyne, albo dowolne dwa rozwiązania, jeżeli jest ich więcej niż jedno. W karcie odpowiedzi przewidziano dla wszystkich zadań mogących mieć wiele rozwiązań miejsce na wpisanie 2 rozwiązań (ale może się zdarzyć, że jest tylko jedno rozwiązanie).*

## 9. Wygryziony sześcián

Z drewnianej kostki sześciennej o krawędzi długości 6 cm wycinamy w narożu mały sześcián o krawędzi 2 cm (patrz rysunek).



Ile ścian, krawędzi oraz wierzchołków ma bryła powstała z dużego sześciánu poprzez wycięcie w każdym jego narożu takiego małego sześciánu?

## 10. Dzielnik niepomnożony

Dodatnia liczba całkowita  $N$  ma dokładnie sześć dodatnich dzielników (łącznie z 1 i  $N$ ). Iloczyn pięciu z tych dzielników jest równy 784.

Ile jest równy dzielnik nieujęty w iloczynie?

## 11. Siedmioczerokwadraty

Znajdź wszystkie liczby siedmiocyfrowe, które są kwadratami liczb całkowitych i których suma cyfr jest równa 4.

Koniec kategorii C1

### 12. Puzzle

Puzzle składają się z czterech elementów w kształcie trójkąta prostokątnego. Wszystkie trójkąty są podobne, ale dwa z nich są większe (i przystające), a dwa mniejsze (również przystające). Dłuższa przyprostokątna małych trójkątów ma tę samą długość co krótsza przyprostokątna dużych trójkątów. Używając za każdym razem wszystkich czterech elementów, można stworzyć wiele kształtów, w tym prostokąt.

**Oblicz obwód tak powstałego prostokąta, jeśli przeciwprostokątne małego i dużego trójkąta mają odpowiednio 9 cm i 12 cm.**

### 13. GM(i)L

Maszyna szyfrująca podaje kody złożone z siedmiu liter wybranych spośród G, M, L, na przykład

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G | M | L | G | M | L | G |
|---|---|---|---|---|---|---|

**Ile jest kodów nie zawierających czterech takich samych liter obok siebie?**

### 14. Czworosciany

**Ile jest czworoscianów, których długości krawędzi są liczbami całkowitymi o łącznej sumie równej 25, a ściany są trójkątami równoramiennymi?** *Uwaga: dwa czworosciany uważamy za takie same, jeśli jeden z czworoscianów można obrócić i przesunąć w taki sposób, żeby jego wierzchołki pokryły się z wierzchołkami drugiego czworoscianu.*

**Koniec kategorii C2**

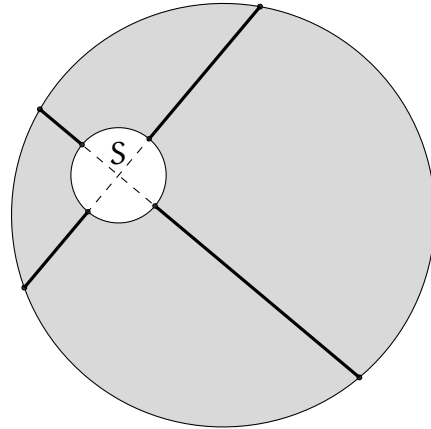
### 15. Bieg z powrotami

Adam ćwiczy biegi długodystansowe. Na dzisiejszym treningu, po wystartowaniu z linii startu, biegnie po zamkniętej bieżni długości 200 m ze stałą prędkością 18,9 km/h. Trener co minutę zapisuje na kartce, ile razy do tej pory Adam powrócił na linię startu. Trening trwał dokładnie godzinę i 15 minut.

**Ile wynosi suma liczb zapisanych przez trenera?**

### 16. Cięciwy

Daniel narysował na kartce duże koło, a w nim – dwie prostopadłe cięciwy, które przecięły się wewnątrz koła w punkcie S. Następnie narysował i wyciął mniejsze koło o środku w punkcie S, które w całości zawierało się w pierwszym kole.



Po usunięciu mniejszego koła, z cięciw powstały cztery odcinki, których długości wyrażały się całkowitymi dodatnimi liczbami centymetrów. Wiadomo, że trzy z tych odcinków miały długości równe 11 cm, 20 cm oraz 25 cm.

**Jaka była długość czwartego odcinka, jeśli wycięte przez Daniela małe koło miało promień o długości wyrażającej się całkowitą liczbą centymetrów?**

**Koniec kategorii L1, GP**

### 17. Macierz iloczynmagiczna

Przedstawiona macierz  $3 \times 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 10 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ma tę własność, że jej wyrazy są liczbami całkowitymi (dodatnimi lub ujemnymi) oraz iloczyn liczb w każdym rzędzie i każdej kolumnie wynosi 20.

**Ile jest całkowitoliczbowych macierzy  $3 \times 3$  o tej własności?**

### 18. Zmazywanie–wpisywanie

Mateusz gra w zmazywanie–wpisywanie na dużej tablicy. Tablica jest początkowo pusta. W każdym ruchu może na niej zapisać dwie liczby równe jeden lub wymazać dwie równe co do wartości liczby  $n$  i wpisać zamiast nich liczby  $n - 1$  i  $n + 1$ .

**Jakiej minimalnej liczby ruchów potrzebuje**

**Mateusz, aby na tablicy znalazła się liczba 25?**

*Uwaga: liczby znajdujące się na tablicy zachowują swoje wartości, ich zapisów nie można łączyć ani rozdzielać.*

**Koniec kategorii L2, HC**