Finał XX Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych, 26.05.2024

Początek wszystkich kategorii

1. Trzecie miejsce

Ania, Bartek, Cezary, Dominika i Edek chcą zająć pięć kolejnych miejsc w jednym rzędzie w kinie. Ania nie chce siedzieć obok Bartka, a Cezary zamierza usiąść obok Edka.

Kto nie może usiąść na środkowym miejscu?

2. Kocie łakocie

Matylda ma dwa duże koty, Bonifacego i Filemona, które bardzo lubią kocie ciasteczka. Daje swoim kotom tylko całe ciastka. Bonifacy zjada każdego dnia taką samą liczbę ciastek. Filemon też, ale Filemon, który jest wielkim łasuchem, zawsze zjada dwa razy więcej ciastek niż Bonifacy. Matylda kupiła dziś paczkę 100 ciasteczek. Wie, że paczka taka wystarczy na tydzień, ale nie wystarczy na 10 dni.

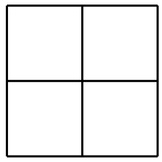
Ile ciastek zjada każdy kot w ciągu tygodnia?

3. Punktualne tramwaje

Tadek mieszka przy ulicy, po której jeżdżą dwie linie tramwajowe: A oraz B. Tramwaje kursują bardzo regularnie; pojazdy linii A podjeżdżają pod przystanek Tadka dokładnie co 15 minut, a tramwaje linii B także podjeżdżają w regularnych odstępach czasu, częściej niż dwa razy w ciągu godziny, ale rzadziej niż pojazdy linii A. Tadek zaobserwował z okna swojego pokoju, że punktualnie o godzinie 11:49 podjechały do jego przystanku tramwaje obu linii; taka sytuacja powtórzyła się dopiero o godzinie 14:04.

Co ile minut kursują tramwaje linii B?

4. Dodawanie w kratkę



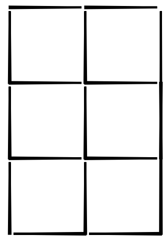
Kacper wpisał w każdą kratkę pokazanego kwadratu pewną cyfrę różną od zera. Otrzymał w ten sposób cztery liczby dwucyfrowe: dwie poziome i dwie pionowe, czytane z góry na dół. Suma tych liczb wynosi 71.

Podaj największą z tych liczb dwucyfrowych.

Gdyby kwadrat był wypełniony jak obok, to liczbami dwucyfrowymi są $31, 42, 34, 12$, *a ich suma to* 119.

3	1
4	2

5. Wykałaczkowa siatka



Basia używa jednakowych wykałaczek do ułożenia prostokątnych siatek o różnej liczbie oczek. Do ułożenia siatki o wymiarach 2×3 oczek Basia wykorzystała 17 wykałaczek.

Ile wykałaczek jest potrzebnych do ułożenia siatki 20×10?

Koniec kategorii CE

6. Maszyna cyfrowa

Za każdym razem, gdy wprowadzamy liczbę do tego wyjątkowego urządzenia, maszyna zastępuje liczbę iloczynem jej cyfr. Taką czynność – już z nową liczbą – powtarzamy tak długo, dopóki nie otrzymamy liczby jednocyfrowej. Przykładowo, dla wprowadzonej liczby 724 należy wykonać trzy przejścia przez maszynę, aby uzyskać jednocyfrowy wynik:

$$724 \longmapsto 56 \longmapsto 30 \longmapsto 0.$$

Z kolei dla liczby 412 potrzebne jest jedno przejście:

$$412 \longmapsto 8.$$

Jaka jest najmniejsza naturalna liczba trzycyfrowa wymagająca więcej niż trzech przejść przez maszynę, aby otrzymać liczbę jednocyfrową?

7. Jak najwięcej
Karina napisała na tablicy liczby 1, 3, 5, 7, 9 i 11. W jednym ruchu Karina wymazuje z tablicy dowolne dwie liczby i dopisuje jedną nową. Przy czym:
– jeśli wymazała dwie różne liczby nieparzyste albo dwie różne liczby parzyste, to odejmuje od większej mniejszą i zapisuje wynik na tablicy;
– jeśli wymazane liczby są równe, to wpisuje 0;
– jeśli wymazała liczbę parzystą i liczbę nieparzystą, to nowa liczba jest ich sumą.
Jaką największą liczbę mogła uzyskać Karina po pięciu ruchach?

8. Palindromy
Anna i Otto to pasjonaci palindromów. Palindrom to liczba, która czytana od lewej strony do prawej, jak i od prawej strony do lewej jest taka sama. Na przykład liczby 1, 22, 272, 1771, 15451 są palindromami. Dzisiaj Anna i Otto, niezależnie od siebie, wybrali po jednym czterocyfrowym palindromie. Z zaskoczeniem odkryli, że suma tych dwóch palindromów jest pięciocyfrowym palindromem.
Jaka jest najmniejsza, a jaka największa suma jaką mogli otrzymać?

Koniec kategorii CM

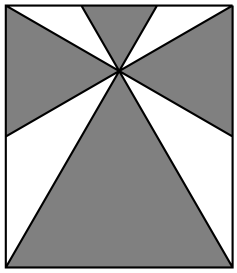
Uwaga do zadań od 9 do 18: aby zadanie było całkowicie rozwiązane należy podać liczbę jego rozwiązań i rozwiązanie, jeśli jest jedyne, albo dowolne dwa rozwiązania, jeżeli jest ich więcej niż jedno. W karcie odpowiedzi przewidziano dla wszystkich zadań mogących mieć wiele rozwiązań miejsce na wpisanie 2 rozwiązań (ale może się zdarzyć, że jest tylko jedno rozwiązanie).

9. WRO
Jak w każdym kryptarytmie, ta sama litera zawsze zastępuje tę samą cyfrę, a ta sama cyfra jest zawsze zastępowana przez tę samą literę. Ponadto, żadna z liczb nie zaczyna się od zera oraz spełniony jest warunek $W < R < O$.

$$\begin{array}{cccc} & W & R & O \\ & O & W & R \\ + & R & O & W \\ \hline G & M & I & L \end{array}$$

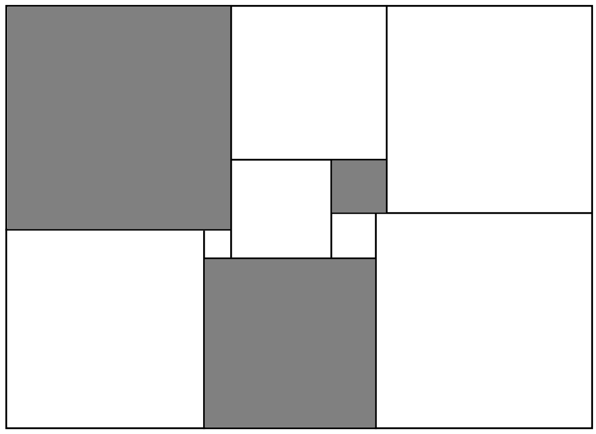
Jaka jest wartość liczby trzycyfrowej WRO?

10. Biały wiatrak



Każdy z zamalowanych na szaro trójkątów, stykających się wierzchołkami w jednym punkcie, jest równoboczny.
Jaki jest stosunek szarego pola do pola całego prostokąta? Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

11. Na szaro
Pewien prostokąt, którego jeden z boków ma długość 65, podzielono na 10 kwadratów o bokach długości całkowitej (dokładnie tak jak na rysunku):



Podać, w kolejności rosnącej, długości boków kwadratów pomalowanych na szaro.

Koniec kategorii C1

12. Księga
Do oznaczenia wszystkich stron grubej księgi kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi użyto pewnej ilość cyfr, w tym 256 dwójek i tyle samo czwórek. Strony numerowane są od jedynki.
Ile stron liczy ta książka? *Wszystkie kartki są ponumerowane z obu stron.*

13. Suma i kwadrat
Pewna liczba całkowita dodatnia mniejsza od 1000 jest równa sumie swoich cyfr oraz kwadratu sumy swoich cyfr.
Jaka to liczba?

14. Mafia

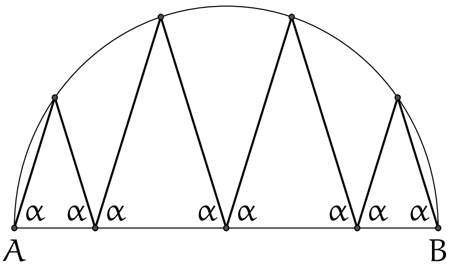
W trakcie obozu matematycznego odbywa się gra w Mafię. Wokół okrągłego stołu zasiada 15 uczestników, wśród których czwórka to członkowie mafii. Uczestnicy są numerowani od 1 do 15 w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Na ile różnych sposobów można wybrać czterech członków mafii tak, aby żadni dwaj mafiozi nie siedzieli obok siebie? *Zakładamy, że pozycje* 1 *i* 15 *również są obok siebie, ponieważ uczestnicy siedzą przy okrągłym stole.*

Koniec kategorii C2

15. Łamana

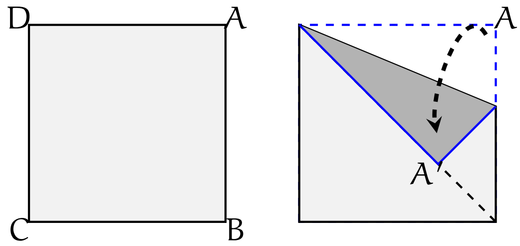
Łamana biegnie zygzakiem pomiędzy końcami A i B średnicy pewnego okręgu, jak pokazano na rysunku:



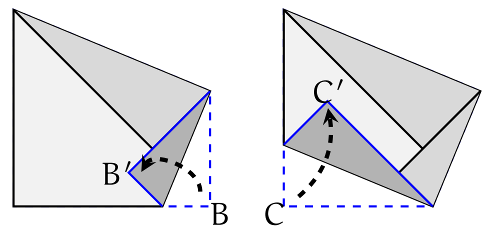
Wiedząc, że oprócz punktów A i B łamana ta ma dokładnie 4 punkty wspólne z łukiem półokręgu, **oblicz miarę kąta α; wynik podaj w stopniach z dokładnością do 1°.**

16. Origami Olka

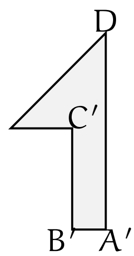
Składanie papieru jest pasją Olka. Z kwadratowego arkusza $ABCD$ cienkiego papieru, o boku długości 1 dm, Olek za pomocą kolejnych trzech zagięć narożników uzyskuje kształt cyfry 1. Pierwsze zagięcie Olka polega na umieszczeniu wierzchołka A arkusza na przekątnej BD — w punkcie A'.



Kolejne zagięcie – narożnika B arkusza – jest wykonane w taki sposób, że odgięte krawędzie papieru są do siebie styczne. W analogiczny sposób Olek wykonuje ostatnie zagięcie narożnika C.



Podać dokładną powierzchnię „jedynki”, wyrażoną w dm², otrzymanej przez Olka (tzn. pole tej części arkusza, która nie została przykryta zgiętymi narożami).



Koniec kategorii L1, GP

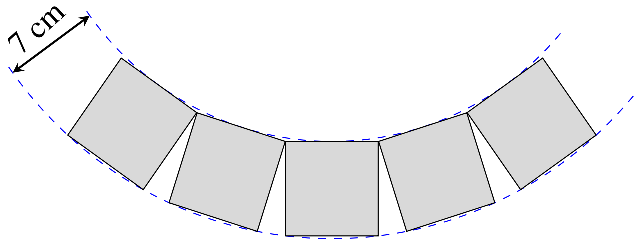
17. ABBA

Rozważamy wszystkie ciągi złożone z dziesięciu liter, z których każda to `A` lub `B`. Ciąg `AABBBBAABB` nie zawiera podciągu `ABBA`, a ciąg `AAAABBAABB` zawiera podciąg `ABBA`.

Ile spośród wszystkich 1024 rozważanych ciągów nie zawiera podciągu `ABBA`?

18. Ozdoba

Archibald odwiedził muzeum i jego uwagę przykuła srebrna ozdoba składająca się z pięciu jednakowych płaskich płytek o kształcie kwadratu, stykających się tylko narożami:



Z opisu eksponatu Archibald dowiedział się, że wszystkie płytki mieszczą się w pewnym pierścieniu, którego promień zewnętrzny i wewnętrzny różnią się o 7 cm, przy czym każda płytka ma dokładnie dwa naroża leżące na zewnętrznym brzegu pierścienia zaś środek boku przeciwległego tym narożom w każdej płytce leży na wewnętrznym brzegu pierścienia. Archibald zapamiętał jeszcze, że długości obu promieni (wewnętrznego i zewnętrznego) pierścienia oraz suma obwodów wszystkich płytek, podane w centymetrach, były liczbami całkowitymi.

Jaką długość, w centymetrach, mógł mieć zewnętrzny promień opisanego pierścienia?

Koniec kategorii L2, HC