XXV Międzynarodowe Mistrzostwa w Grach Matematycznych i Logicznych
IX Mistrzostwa Polski w GMiL

Finał krajowy – II dzień 22 maja 2011

CE : zadania o numerach od **1** do **5**; czas - **60** minut

CM : zadania o numerach od **1** do **8**; czas - **90** minut

C1 : zadania o numerach od **1** do **11**; czas - **120** minut

C2 : zadania o numerach od **1** do **14**; czas - **180** minut

L1 i **GP**: zadania o numerach od **1** do **16**; czas - **180** min.

L2 i **HC**: zadania o numerach od **1** do **18**; czas - **180** min.

WAŻNE !!! Wyniki należy wpisać w odpowiedniej ramce karty odpowiedzi.

Kartę wypełniać czytelnie, bez skreśleń i poprawek.

ZADANIA

POCZĄTEK WSZYSTKICH KATEGORII

1 – Pięć liczb całkowitych. Jaś napisał pięć kolejno następujących po sobie liczb całkowitych dodatnich i zauważył ze zdziwieniem, że suma liczby największej i liczby o jeden od niej mniejszej jest równa sumie trzech pozostałych. **Podać największą z liczb Jasia?**

2 – Przytulanki. Kasia, na pytanie przyjaciółki z klasy, ile i jakie ma w domu zabawki-przytulanki, odpowiedziała:
„Wszystkie są kotkami z wyjątkiem dwóch; wszystkie są pieskami z wyjątkiem dwóch i wszystkie są misiami z wyjątkiem dwóch”.
Ile przytulanek ma Kasia wiedząc, że ma co najmniej jednego kotka, co najmniej jednego pieska i co najmniej jednego misia?

3 – Wiek chłopców. Jeden z kilku chłopców będących w różnym wieku ma 10 lat, co stanowi piątą część łącznego wieku wszystkich chłopców (włączając tego chłopca dziesięcioletniego). Dziesięciolatek ustawił wszystkich pozostałych chłopców (bez niego) w szeregu od najmłodszego do najstarszego. Okazało się, że najstarszy ma 13 lat, a różnica wieku pomiędzy każdymi dwoma sąsiadami w tym szeregu jest taka sama. **Ile lat ma każdy z chłopców?** W karcie odpowiedzi wypisać wiek chłopców (wszystkich, łącznie z dziesięciolatkiem), od najmłodszego do najstarszego, zaczynając od lewej i oddzielając liczby przecinkami.

4 – Kafelkowanie łazienki. Kafelkarz ma ułożyć podłogę łazienki o wymiarach 224 cm × 154 cm, możliwie największymi kwadratowymi płytkami jednakowej wielkości. **Jak duże mogą być płytki, aby nie trzeba było ich docinać?** (w karcie odpowiedzi podać, w centymetrach, długość boku płytki). Uwaga: zakładamy, że nie ma odstępów między kafelkami (tzw. fug).

5 – Dzieci i czekoladki. Troje dzieci zjada 3 czekoladki w 3 minuty. **Ile trzeba dzieci do zjedzenia sześćdziesięciu czekoladek w pół godziny?** Przyjąć, że wszystkie dzieci zjadają czekoladki (które są identyczne) w takim samym tempie.

KONIEC kategorii CE

6 – Egzaminy na piątkę. Maturzysta zdał ogółem 10 egzaminów uzyskując, na każdym egzaminie, ocenę albo dostateczny (3,0) albo dobry (4,0) albo bardzo dobry (5,0). Średnia (arytmetyczna) ocen ze wszystkich egzaminów była równa 4,6 (46/10). **Ile egzaminów zdał na piątkę, jeżeli wśród wszystkich ocen była co najmniej jedna trójka i co najmniej jedna czwórka?**

7 – Dzień kłamstwa. Dwaj bracia Adaś i Bolek mówią zawsze prawdę, z jednym jednak wyjątkiem: każdy z nich kłamie na temat dnia swoich urodzin w jednym dniu w roku, a tym dniem jest właśnie ten, w którym obchodzi swoje urodziny (Adaś w dniu swoich urodzin, Bolek w dniu swoich urodzin). Pytamy ich dziś, 22 maja:
„Kiedy obchodzisz swoje urodziny?”,
Adaś odpowiada: „Wczoraj!”
Bolek odpowiada: „Jutro!”.
Ale jutro, 23 maja, na to samo pytanie, każdy z nich udzieli takiej samej odpowiedzi… **Kiedy więc mają urodziny? Podać dzień i miesiąc, w którym każdy z nich obchodzi swoje urodziny.** W Karcie odpowiedzi podać dzień i miesiąc w formacie: DD-MM (np. 12-03 dla 12 marca).

8 – Spostrzegawczy Kazik. Na każdym kilometrze szosy prostoliniowej między miejscowościami A i B jest ustawiony prostopadłościenny słupek, na jednej ścianie którego znajduje się liczba wskazująca odległość, w kilometrach, do miejscowości B, a na drugiej – do miejscowości A. Kazik zauważył, że na każdym słupku suma wszystkich cyfr figurujących tam dwóch liczb, jest równa 13. **Jaka jest odległość, w kilometrach, miejscowości A od miejscowości B?**

KONIEC KATEGORII CM

Uwaga do zadań od 9 do 18. *Aby zadanie było kompletnie rozwiązane należy podać liczbę jego rozwiązań i to rozwiązanie, jeśli jest jedyne, albo dwa rozwiązania, jeżeli jest ich więcej. W karcie odpowiedzi przewidziano dla wszystkich zadań mogących mieć wiele rozwiązań miejsce na wpisanie 2 rozwiązań (ale może sie zdarzyć, że jest tylko jedno rozwiązanie!).*

9 – Plansza. Kwadratowa plansza jest podzielona na 16 jednakowych kwadratowych pól. Wybieramy punkty, będące środkami pewnych pól planszy w taki sposób, aby żadne cztery wybrane punkty nie były wierzchołkami kwadratu, którego boki są równoległe do boków planszy. **Ile takich punktów, co najwyżej, można wybrać na planszy 4×4?**

10 - Suma = iloczyn. Liczby pięciocyfrowe 11125, 11133 i 11222 mają następującą ciekawą własność: suma cyfr każdej z tych liczb jest równa iloczynowi jej cyfr a ponadto cyfry występują w każdej z nich w kolejności niemalejącej. Np. dla liczby 11125 mamy równość $1+1+1+2+5=1\times1\times1\times2\times5$. Zosia napisała liczbę trzynastocyfrową mającą tę samą własność (suma cyfr jest równa iloczynowi cyfr i cyfry występują w liczbie w kolejności niemalejącej). **Jaką liczbę mogła napisać?**

11 – Wiek pani Anny. Pani Anna obchodzi dzisiaj, 22 maja 2011, jednocześnie rocznicę urodzin i rocznicę ślubu. Dodaje liczbę swoich lat do roku kalendarzowego swego wyjścia za mąż. Otrzymuje w ten sposób operację dodawania z dziesięcioma różnymi cyframi. Uzupełnić tę operację (patrz rysunek obok) wiedząc, że pani Anna wyszła za mąż przed trzydziestką (w chwili ślubu miała mniej niż 30 lat). **Podać rok kalendarzowy ślubu i wiek pani Anny w dniu 22 maja 2011.**

$$\begin{array}{r} 1\,9\,\bullet\,\bullet \\ +\quad\;\;\bullet\,\bullet \\ \hline \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \end{array}$$

KONIEC KATEGORII C1

12 – Na taśmie. Na taśmie produkcyjnej znajdują się w jednym rzędzie pola, które ponumerowano kolejnymi liczbami naturalnymi poczynając od 1. Na każdym z tych pól znajduje się jedno urządzenie, które również ma numer zgodny z numerem pola, na którym się znajduje. Wagi wszystkich urządzeń wyrażają się liczbami całkowitymi kilogramów. Okazuje się, ze jeśli wagę urządzenia, o numerze równym co najmniej 2, dodamy do podwojonej wagi urządzenia o numerze o jeden mniejszym, to otrzymamy zawsze 94 kg. **Jaka jest, co najwyżej, liczba urządzeń na tej taśmie i ile waży (przy tej maksymalnej liczbie urządzeń) urządzenie będące na polu numer 1?**

13 - Średnia arytmetyczna. Znaleźć dodatnią, całkowitą liczbę trzycyfrową abc (o różnych cyfrach i różnych od zera), która jest średnią arytmetyczną liczb bca i cab, utworzonych przez przestawienie w niej cyfr.

14 – Dwa zegary. W tej chwili (nazwijmy ją chwilą „zero") dwa zegary na wieży ratusza wskazują południe. Wiemy, że pierwszy zegar spieszy o 8 minut na dobę, drugi spóźnia się o 4 minuty na dobę. Zegary chodzą wiele lat niestrudzenie dalej (bez jakichkolwiek zatrzymań). **Po jakim, najkrótszym, czasie (po ilu godzinach) od chwili „zero", obydwa zegary znów wskażą jednocześnie godzinę dwunastą (w dzień)?**

KONIEC KATEGORII C2

15 – Loteria. Na loterii, gdzie losy są ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi od 1 do 9999, los jest wygrywający, jeżeli można podzielić jego numer na dwie części kreską pionową w taki sposób, aby suma cyfr znajdujących się przed kreską była równa sumie cyfr za kreską. Wśród losów wygrywających są np. losy o numerach: 33, 440, 202, ponieważ 3|3, 4|40, 20|2. Tomek kupił dwa losy i obydwa okazały się wygrywające. Ich numery są kolejnymi liczbami czterocyfrowymi, a jedna z tych liczb jest kwadratem innej liczby całkowitej. **Jakie były numery tych losów?**

16 – Prawie kwadrat liczby. Liczba 48 ma następującą własność: i ona i jej połowa, powiększone o 1, każda z nich, jest kwadratem pewnej liczby naturalnej ($48+1=49=7^2$, $24+1=25=5^2$). **Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, większą od 48, mającą tę własność.**

KONIEC KATEGORII L1, GP

17 – Czworościan. Kwadrat o boku 16 cm podzielić na cztery części tak, aby dał się z nich utworzyć czworościan. **Znaleźć promień kuli wpisanej w ten czworościan.**

18 – Perły. Naszyjnik został zrobiony z dużych (jednakowych) i z małych (również jednakowych) pereł. Łączna liczba pereł w tym naszyjniku jest mniejsza od 1000. Jubiler nie jest jednak pewny wyrobu i dokonuje zmian. Zastąpił on pewną całkowitą liczbę dużych pereł tego naszyjnika stanowiącą dokładnie 70% liczby dużych pereł w wykonanym pierwotnie naszyjniku, perłami małymi o tej samej całkowitej liczbie i zauważył, że ciężar naszyjnika zmniejszył się o 60%. Powraca do pierwotnej wersji naszyjnika i znowu eksperymentuje. Zastępuje z kolei pewną, również całkowitą liczbę małych pereł tego naszyjnika stanowiącą, tym razem, dokładnie 60% liczby małych pereł w wykonanym pierwotnie naszyjniku, perłami dużymi o tej samej całkowitej liczbie i po tej zamianie zauważył, że ciężar naszyjnika zwiększył się o 70%. **Znaleźć łączną liczbę pereł w naszyjniku.**

KONIEC KATEGORII L2, HC

POWODZENIA !