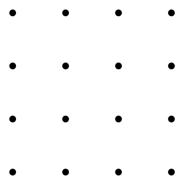
Finał XVI Mistrzostw Polski w Grach Matematycznych i Logicznych, 19.05.2019

Początek wszystkich kategorii

1. **Pieczątka.** Używając tej pieczątki Tomek odcisnął liczbę 483. **Jak wygląda pieczątka, za pomocą której będzie mógł odcisnąć liczbę 2019?**

2. **Kropki i kwadraty.** Ile można narysować różnych kwadratów, mających wierzchołki w zaznaczonych szesnastu punktach? Dwa kwadraty są różne, jeśli mają choć jeden wierzchołek różny.



3. **Ciąg Weroniki.** Weronika wypisała liczby te liczby od 1 do 100, które zawierają jakąkolwiek z cyfr 2, 0, 1, 9. Ciąg zaczyna się od

$$1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$$

Ile liczb wypisała?

4. **Fuzuli.** Do niektórych pól kwadratowego diagramu należy wpisać cyfry od 1 do 4 tak, aby:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się cztery różne cyfry;
- żadne cztery kratki, tworzące kwadrat 2×2, nie były wypełnione cyframi.

Zasady ilustruje wypełniony obok przykładowy diagram. W karcie odpowiedzi wypełnij poniższy diagram.

4		3	2	1	
	3	1		4	2
2		4	3		1
1	4	2		3	
	1		4	2	3
3	2		1		4

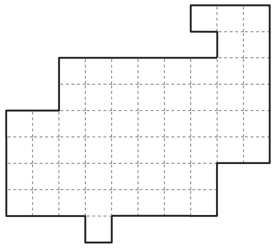
4		3			1
				3	
			2		
		1			
	2				
1			3		4

5. **Wakacje.** Ola przez 13 dni była na wakacjach w Rabce. Mimo, że czasami padało, to pogoda nie była najgorsza – jeśli rano padał deszcz, to w południe było pogodnie; jeśli w południe padało, to wieczór był pogodny. Jeśli padało wieczorem, to tego samego dnia rano świeciło słońce. Deszczowych wieczorów było dwa razy więcej niż dni z południowym deszczem. Deszcz padał w południe dwa razy częściej niż rano i nigdy nie padało przez cały dzień. **Ile było całkowicie pogodnych dni podczas pobytu Oli w Rabce**?

Koniec kategorii CE

6. **Mecz koszykówki.** Mecz koszykówki pomiędzy drużynami A i B zakończył się wygraną drużyny A, która zdobyła o 12 punktów więcej niż drużyna B. Za każdy celny rzut do kosza – jak wiadomo – można otrzymać 1, 2 lub 3 punkty. W czasie meczu sędzia zanotował, że w sumie było 55 celnych rzutów zawodników obu drużyn, przy czym rzutów za 1 punkt i za 3 punkty było tyle samo. **Ile punktów zdobyła zwycięska drużyna?**

7. **Wycinanka.**
Rozetnij figurę wzdłuż kratek na dwie części, które można dokładnie na siebie nałożyć. Aby to się udało, trzeba jedną z części podnieść i obrócić.

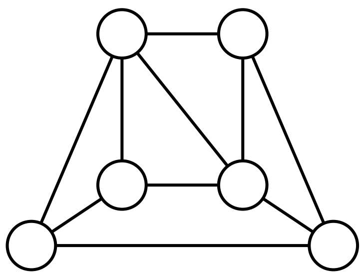


8. Alina ma długą kartkę z 2019 kratkami. W pierwszych dwóch kratkach wpisuje liczby 3 i 4. W każdym kolejnym kroku sumuje wszystkie dotychczas wpisane liczby i wpisuje ostatnią cyfrę otrzymanej sumy do kolejnej kratki. Wobec tego w pierwszych czterech kratkach znajdą się liczby 3, 4, 7, 4. **Jaka liczba zostanie wpisana w ostatniej, dwa tysiące dziewiętnastej kratce?**

Koniec kategorii CM

*Uwaga do zadań od **9** do **18**: aby zadanie było całkowicie rozwiązane należy podać liczbę jego rozwiązań i rozwiązanie, jeśli jest jedyne, albo dowolne dwa rozwiązania, jeżeli jest ich więcej niż jedno. W karcie odpowiedzi przewidziano dla wszystkich zadań mogących mieć wiele rozwiązań miejsce na wpisanie 2 rozwiązań (ale może się zdarzyć, że jest tylko jedno rozwiązanie!).*

9. Rozmieść cyfry od 1 do 6 w kółkach na rysunku tak, żeby w żadnych kołach połączonych odcinkiem nie występowały kolejne cyfry:



10. **Jajka wielkanocne.** Zgodnie z tradycją, w wielkanocnej grze rodzinnej lub sąsiedzkiej chowa się w ogrodzie czekoladowe jajka i wygrywa ten, kto znajdzie największą ich liczbę. W grze bierze udział czworo dzieci, każde wraz z jednym ze swoich rodziców. Na koniec zabawy okazało się, że Adam znalazł 5 jajek, Basia 4, Celina pół tuzina a Damian tylko 2. Rodzice również brali udział w zabawie i nie byli tacy najgorsi: pan Sieradzki znalazł ich trzy razy więcej niż jego dziecko, pani Ustecka dwa razy tyle, ile jej dziecko, pani Ziębicka pięć razy tyle co jej potomek,

a pan Toruński tyle samo co jego dziecko. O całkowitej liczbie jajek wiadomo tylko, że kończy się cyfrą 5. **Podaj nazwiska wszystkich dzieci.**

11. **Sześciony.** Sześcionem nazywamy liczbę sześciocyfrową podzielną przez 6 o takiej własności, że po skreśleniu dowolnych pięciu cyfr tej liczby (zapisanej w systemie dziesiętnym) pozostała liczba jednocyfrowa jest dzielnikiem liczby 6. **Ile jest wszystkich sześcionów?**

Koniec kategorii C1

12. **Rowerzyści.** Dwa tory wyścigowe w kształcie okręgów o promieniach 100 metrów i 75 metrów są styczne zewnętrznie. **Po jakim najkrótszym czasie dwaj rowerzyści poruszający się każdy po jednym z torów i startujący z punktu styczności spotkają się ponownie, jeżeli obaj poruszają się z prędkością 30km/h?** Wynik podaj w sekundach zaokrąglając do całości. W razie potrzeby przyjmij, że $\pi = 3,14$.

13. **Spis powszechny na archipelagu.** Na wyspie Dychotomii, leżącej w archipelagu Niezgody, żyją tylko dwie rodziny, rodzina Prawdziwków, którzy zawsze mówią prawdę i rodzina Muchomorów, której członkowie zawsze kłamią. Każdy z 400 dorosłych mieszkańców wyspy jest albo myśliwym, albo rybakiem, albo urzędnikiem państwowym. Dlatego też formularz spisu powszechnego wypełnionego przez wszystkich mieszkańców liczył tylko trzy pytania:

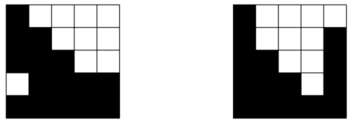
a) Czy jesteś myśliwym?

b) Czy jesteś rybakiem?

c) Czy jesteś urzędnikiem państwowym?

300 mieszkańców odpowiedziało twierdząco na pierwsze pytanie, 200 na drugie i 150 na trzecie. **Ilu jest Prawdziwków a ilu Muchomorów na Dychotomii?**

14. W kwadracie podzielonym na 25 kwadracików zaczerniamy 15 kwadracików tak, aby z każdego czarnego kwadracika dało się dojść do każdego innego czarnego kwadracika chodząc w jednym kroku tylko o jeden kwadracik w bok, w górę lub w dół i przechodząc tylko przez czarne kwadraciki. Ponadto wśród 5 kwadracików w dolnej warstwie zaczerniamy wszystkie kwadraciki, w kolejnej, drugiej od dołu warstwie – 4 kwadraciki, w trzeciej 3 kwadraciki, w czwartej 2 kwadraciki i w końcu w górnej warstwie jeden kwadracik. **Na ile sposobów można to zrobić?** Na rysunku pokazano przykładowe dwa różne zaczernienia spełniające warunki zadania.



Koniec kategorii C2

15. **Trójkąt.** Na płaszczyźnie danych jest sześć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Monika losuje kolejno odcinki, rzucając dwiema zwykłymi kostkami. Jeśli wypadają takie same liczby oczek, powtarza rzut tak długo, aż wypadną różne liczby oczek, a następnie łączy punkty o wylosowanych numerach odcinkiem. Kończy po narysowaniu trzech różnych odcinków. **Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że postępując w opisany sposób Monika otrzyma trójkąt, którego bokami są trzy zaznaczone odcinki?**

16. **Trójkąt, kwadrat i prostokąt.** Janusz ma patyk o długości 100 cm i chce go rozciąć na 11 części w taki sposób, żeby długość każdego kawałka wyrażona w cm była dodatnią liczbą całkowitą i żeby, używając każdego kawałka dokładnie raz dało się zbudować trójkąt, kwadrat i prostokąt, który nie jest kwadratem. **Jak Janusz powinien rozciąć patyk, aby suma pól zbudowanych figur była największa? W karcie odpowiedzi podaj tylko pole prostokąta w cm^2.** Uwaga: Każdy kształt musi mieć obszar większy niż zero.

Koniec kategorii L1, GP

17. Weronika narysowała dwa okręgi o wspólnym środku w pewnym punkcie kratowym. Na każdym z okręgów znajdowały się (jakieś) punkty kratowe, ale w pierścieniu pomiędzy tymi okręgami nie było żadnych punktów kratowych. Ponadto pole tego pierścienia było większe niż 25, zaś wewnętrzny okrąg miał możliwie najmniejszy promień. **Jaki był promień większego z narysowanych okręgów?**
Uwaga: punktami kratowymi są punkty na płaszczyźnie o obu współrzędnych całkowitych.

18. W kwadratową tablicę o wymiarach 2019 na 2019 pól wpisano liczby całkowite dodatnie w taki sposób, że w każdym polu wpisana jest najmniejsza liczba nie występująca ani w polach znajdujących się w tym samym wierszu na lewo, ani w tej samej kolumnie w dół od danego pola. Na rysunku przedstawiono lewy dolny róg tej tablicy. **Jaka liczba zostanie wpisana w pole leżące w górnym wierszu i środkowej kolumnie?**

3	4	1	2	
2	1	4	3	
1	2	3	4	

Koniec kategorii L2, HC