

Jour 2 – Problème 1 – La cantine

- Parmi les 15 enfants qui mangent des pâtes un jour sur deux, $25 - 20 = 5$ en ont mangé hier

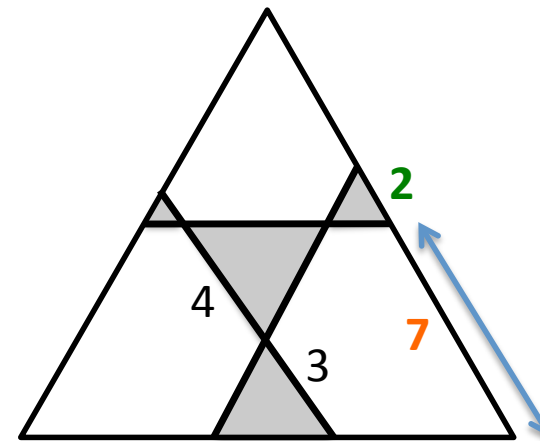
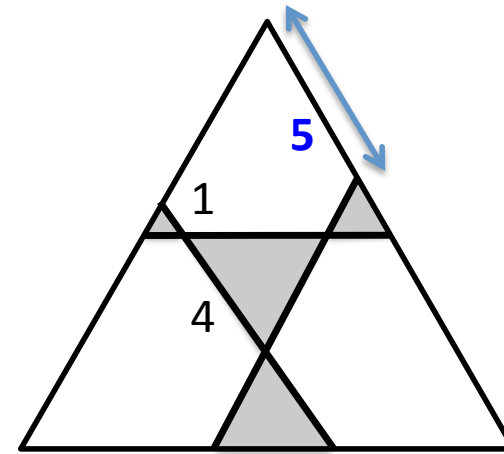
	Hier	Aujourd'hui
20 enfants	20	20
15 enfants	5	
Autres enfants	0	0
Total	25	

- Toujours parmi eux, $15 - 5 = 10$ en ont mangé aujourd'hui
- La réponse est $20 + 10 = 30$ enfants

	Hier	Aujourd'hui
20 enfants	20	20
15 enfants	5	10
Autres enfants	0	0
Total	25	30

Jour 2 – Problème 2 – Devine côté

- La longueur du segment en haut est $1 + 4 = 5$
- La longueur du segment en bas est $4 + 3 = 7$
- La réponse est $5 + 2 + 7 = 14$



Jour 2 – Problème 3 – Vrai ou faux ?

Sens de la marche



- Il y a 0 habitant de Bol devant le premier marcheur
- Il ment car $0 >$ « nombre de Pelg derrière lui » est impossible, il habite Bol



- Il y a au moins 1 habitant de Bol devant le dernier marcheur
- Il y a 0 habitant de Pelg derrière lui
- Il dit la vérité car $1 > 0$, il habite Pelg



Jour 2 – Problème 3 – Vrai ou faux ?

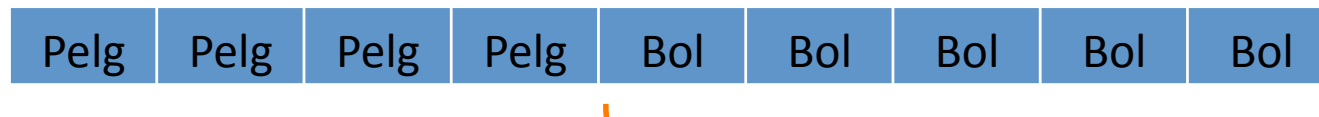
Sens de la marche



- Il y a 1 habitant de Bol devant le 2^{ème} marcheur
- Il y a au moins 1 habitant de Pelg derrière lui
- Il ment car $1 >$ « nombre de Pelg derrière lui » est impossible, il habite Bol



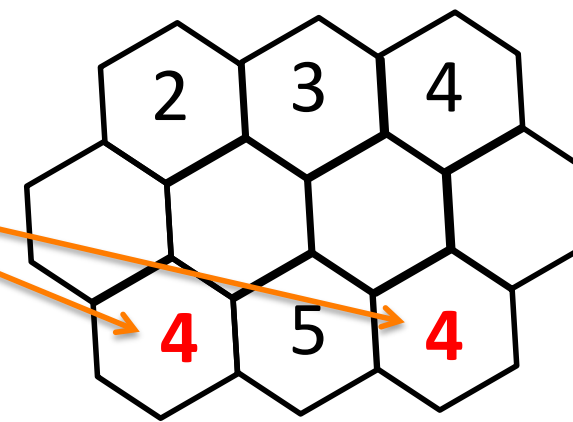
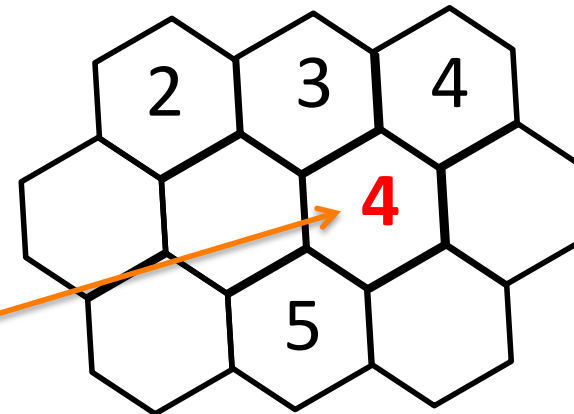
- Nous continuons avec l'avant-dernier marcheur, le 3^{ème}, etc.



- La réponse est **5** habitants de Bol

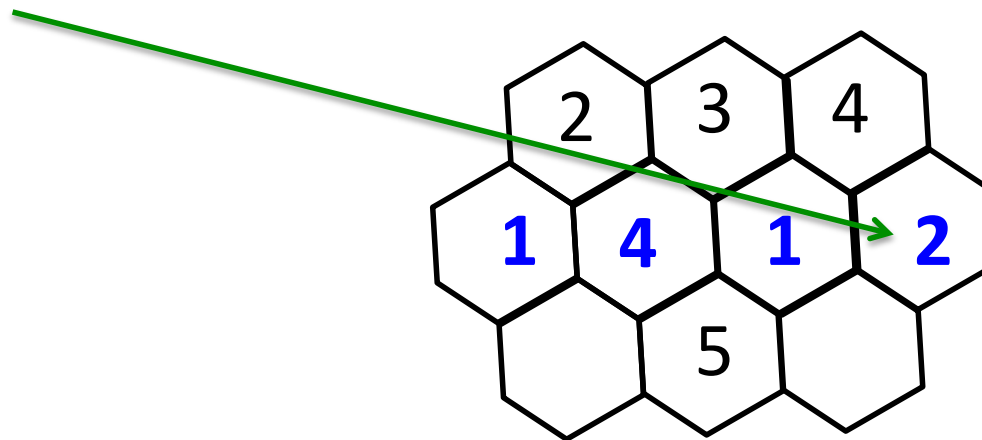
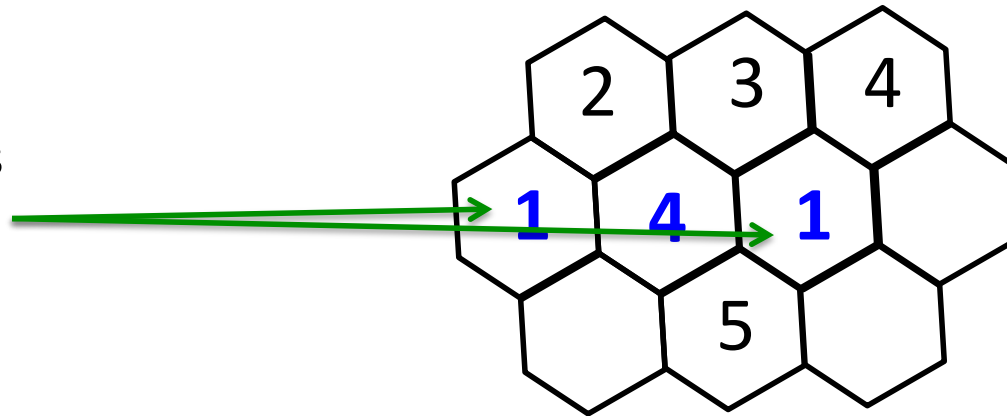
Jour 2 – Problème 4 – Les alvéoles d'abeilles

- Il faut un 4 autour du 5 déjà rempli
- Il n'est pas autour du 4 déjà rempli
- Il n'est pas ici car il n'y aurait pas 1, 2 et 3 autour de lui



Jour 2 – Problème 4 – Les alvéoles d'abeilles

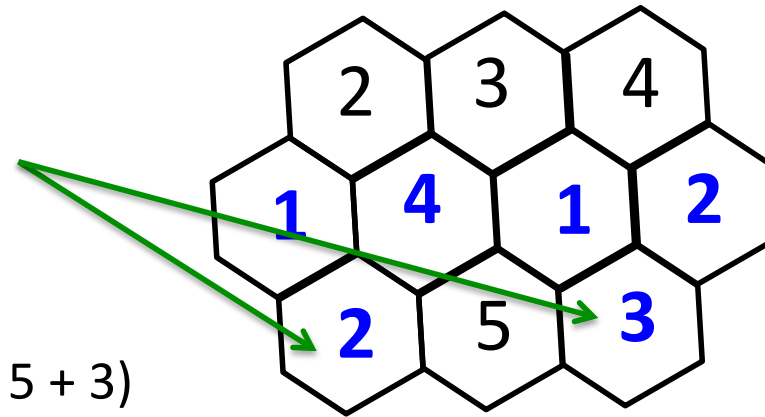
- Il faut un 1 autour des 2 et 3 déjà rempli
- Il faut un 2 autour du 4 déjà rempli



Jour 2 – Problème 4 – Les alvéoles d'abeilles

- Nous terminons le remplissage

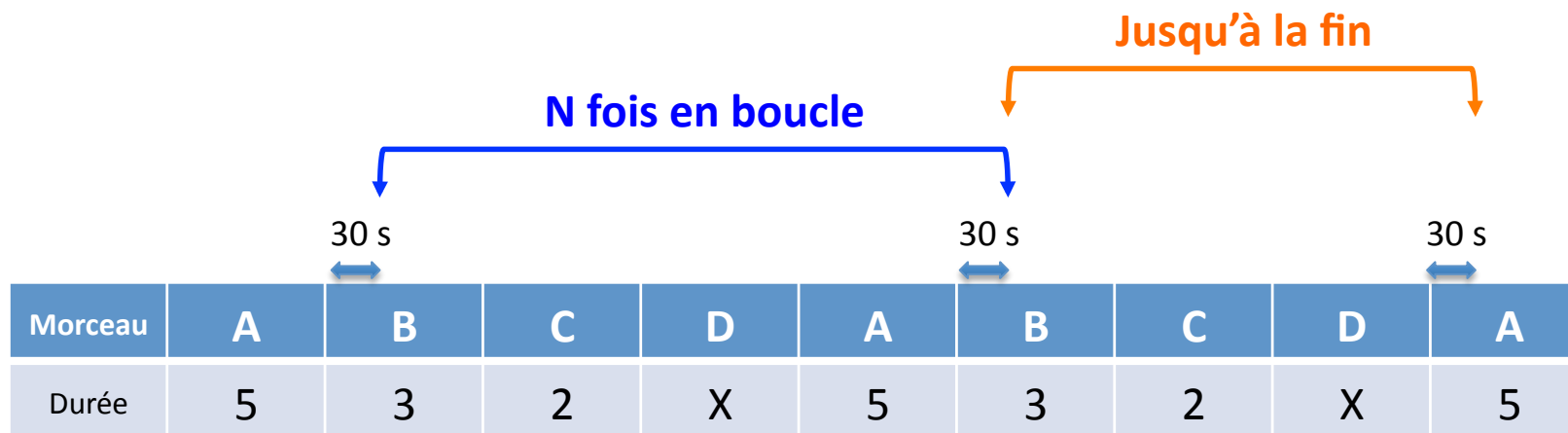
- La réponse est
 $(2 + 3 + 4) + (1 + 4 + 1 + 2) + (2 + 5 + 3)$
 $= 9 + 8 + 10 = \mathbf{27}$ grammes de miel



- *Nous vérifions les alvéoles autour desquelles nous n'avons pas raisonné*
- *La configuration est unique*

Jour 2 – Problème 5 – Les morceaux de musique

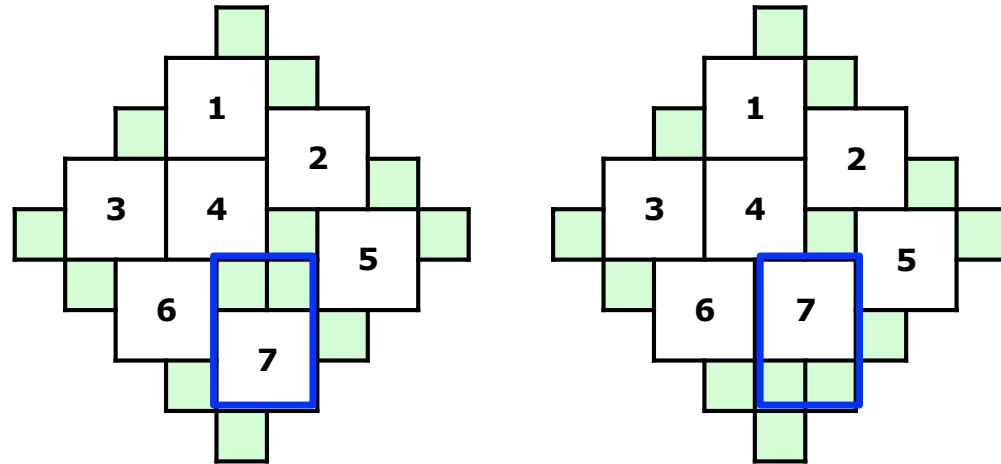
- Soit X la durée du morceau D demandée ($X \leq 9$)



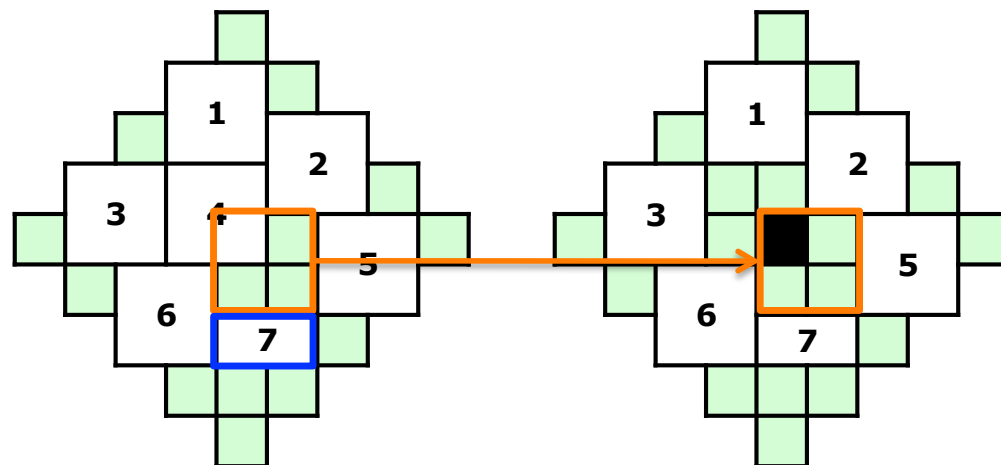
- $N(10 + X) + (5 + X) = 60$, soit $10N + (N+1)X = 55$
- $(N+1)X$ est impair, N est pair (strictement inférieur à 6 car $60 > 55$)
- $N \neq 0$ car $X = 55$ est impossible
- $N \neq 2$ car $3X = 35$ est impossible
- $N = 4$, $X = \mathbf{3}$ minutes

Jour 2 – Problème 6 – Le diamant

- Il faut au moins 7 petits carrés noirs
- Nous allons montrer que ce minimum est atteignable

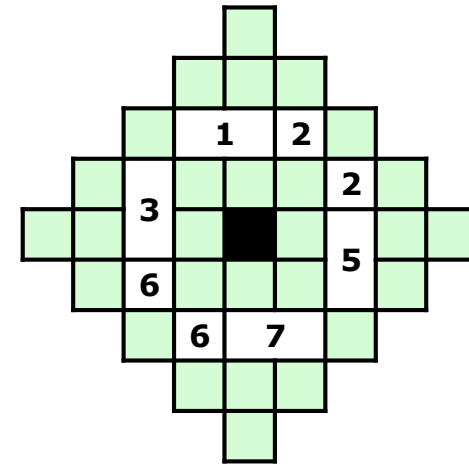
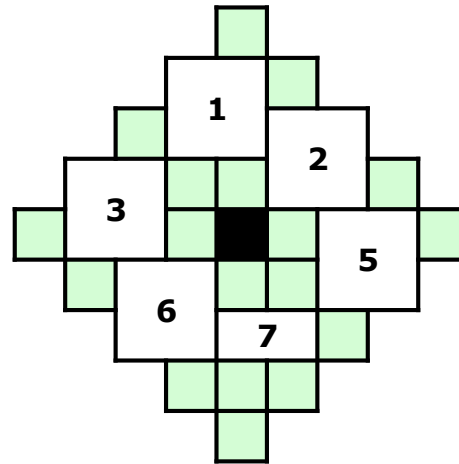


- Le petit carré au centre est noir

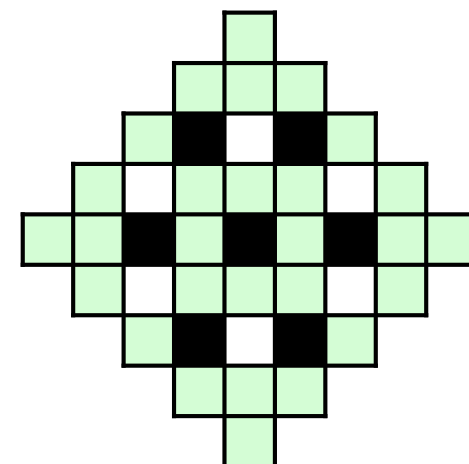
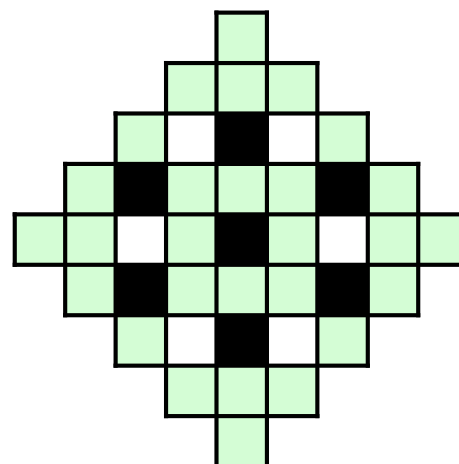


Jour 2 – Problème 6 – Le diamant

- La position des petits carrés est invariante par rotation



- 2 coloriages sont possibles (chacun est obtenu par rotation de l'autre)



- La réponse est **7**

Jour 2 – Problème 7 – Le tour du monde

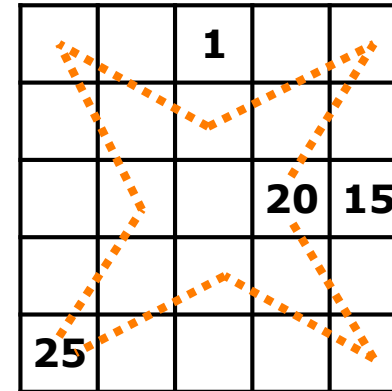
- Une semaine compte 7 jours
- Un jour compte $24 = 8 \times 3$ heures
- Une heure compte $60 = 6 \times 5 \times 2$ minutes
- Une minute compte $60 = (3 \times 5) \times 4$ secondes

- Une semaine compte $(3 \times 5) \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ secondes

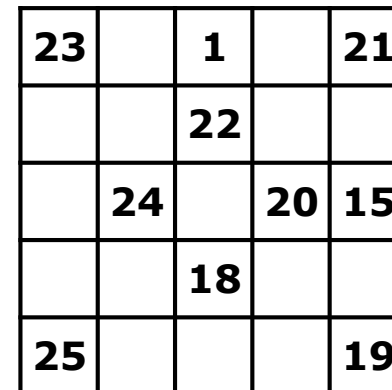
- Il faut multiplier par 3 pour obtenir $(5) \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
puis par 2 pour obtenir $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
- Nous ne pouvons plus multiplier car $(11 \times (2 \times 3)) \times 7 > 80$ jours
- La réponse est $(2 \times 3) = \mathbf{6}$ semaines

Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- A partir d'un coin, il existe 2 possibilités



- Nous numérotons les cases 25 à 20 dans le sens forcé, puis 20 à 18



Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- Nous numérotons toutes les cases **16** atteignables à partir de la case 15
- Nous numérotons toutes les cases **17** atteignables à partir de la case 18
- Il n’y a qu’une possibilité pour relier une case 16 à une case 17
- Nous numérotons la case **14**

23		1	16	21
	17	22	17	
17	24		20	15
		18		
25			16	19

23		1	16	21
	17	22		
	24		20	15
		18		
25			14	19

Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- Il n'y a qu'une possibilité pour rentrer et sortir de cette case
- C'est la case numérotée 13 demandée

23		1	16	21
	17	22		
	24		20	15
		18		
25			14	19

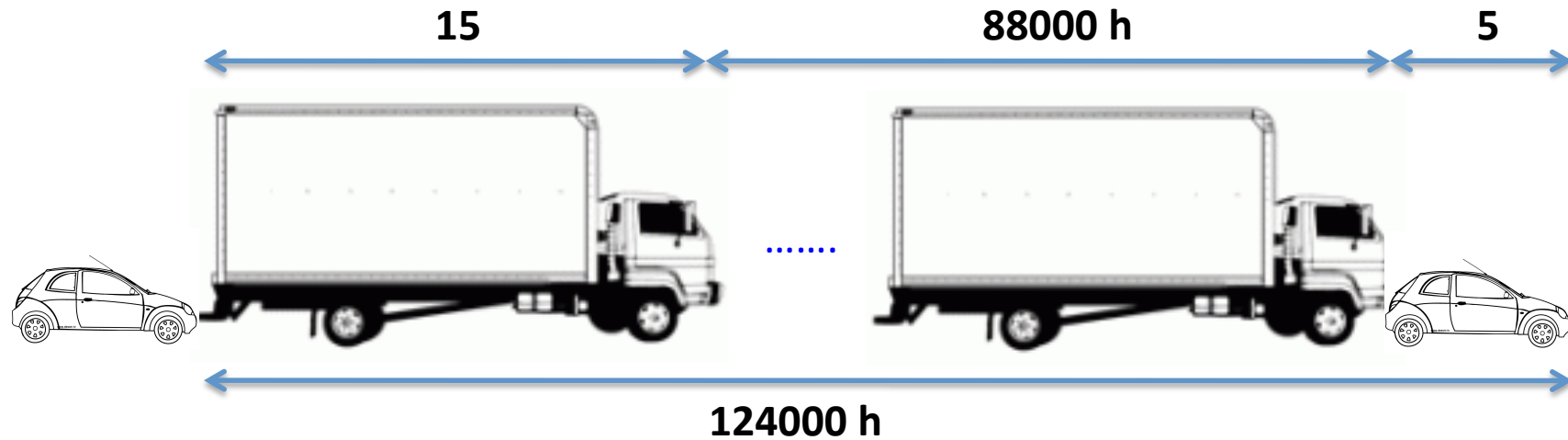
		1		
			20	15
	X			
25				

Jour 2 – Problème 8 – Le cavalier

- *Nous numérotons les cases 11 à partir de 12, 2 à partir de 1, puis 3 jusqu'à 10*
- *Nous vérifions l'existence du chemin*
- *Il est unique*

23	6	1	16	21
12	17	22	7	2
5	24	11	20	15
10	13	18	3	8
25	4	9	14	19

Jour 2 – Problème 9 – Le dépassement



- Soit h le nombre d'heures écoulées
- $15 + 88000h + 5 = 124000h$ (en mètres)
- $h = 2/3600$ (en heures)
- La réponse est **2,00** secondes

Jour 2 – Problème 10 – Les pizzas

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < 1$
- Il faut découper une pizza en 2
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < 1$
- Il faut découper une deuxième pizza en 3
- $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- Il faut découper la troisième pizza en 4 ou en 5
- Il y a **2 réponses**, $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \times 360 = \mathbf{390}$ ou $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \times 360 = \mathbf{372}$ grammes

Jour 2 – Problème 11 – La coloration des nombres

- Comme les trois couleurs doivent être utilisées, la couleur de 2 (B) est différente de celle de 1 (A)
- Si 3 est de couleur B, alors 5, 7 et tous les nombres suivants sont de couleur B
- 4 n'est pas de couleur A, ni de couleur B
- 6 n'est pas de couleur A, ni de couleur C
- Il y a **6** (permutations des trois couleurs) coloriages de la forme ABB...
- 3 n'est pas de couleur A
sinon la couleur C ne serait pas utilisée

AB

ABB?B?BBBB...

ABB**AB**?BBBB...

ABB**B**BBBB...

ABB**C**ABBBB...

ABB**C****C**BBBB**B**...

ABB**C**BBBBBB...

ABC

Jour 2 – Problème 11 – La coloration des nombres

- **Si** 4 et 5 sont de couleurs différentes, alors on aboutit toujours à une contradiction
- **Si** 4 et 5 sont de couleur A
- **Si** 4 et 5 sont de couleur B
- **Si** 4 et 5 sont de couleur C, alors 6 n'est pas de couleur A, ni de couleur B
- En tenant compte des permutations des trois couleurs, il y a au total $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ coloriages différents des 120 nombres

ABCAB

ABCAC

ABCBAB

ABCBCB?B

ABCCAAA

ABCCB?B

ABCAA...

ABCBB...

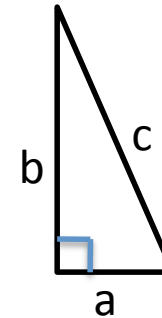
ABCCAC...

ABCCBCC...

ABCCCC...

Jour 2 – Problème 12 – Les deux prés

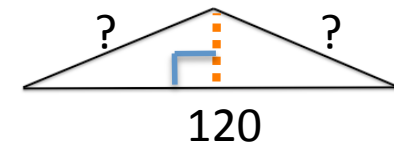
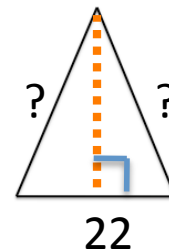
- Deux triangles rectangles ayant
mêmes hypoténuse c
et aire $ab/2$
sont identiques
car ils ont mêmes côtés de l'angle droit a et b
(déterminés par leurs somme et différence)



$$(a \pm b)^2 = c^2 \pm 4(ab/2)$$

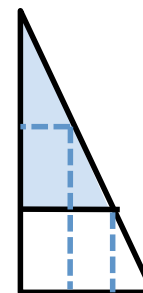
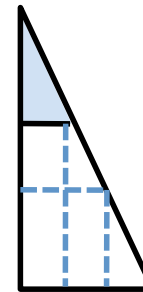
Jour 2 – Problème 12 – Les deux prés

- Les quatre triangles rectangles sont identiques (côtés 11, 60 et ?)
- $60^2 + 11^2 = 60^2 + 121 = 60^2 + 2 \times 60 + 1^2 = 61^2$
- L'hypoténuse (?) est 61
- La réponse, unique, est **61** mètres



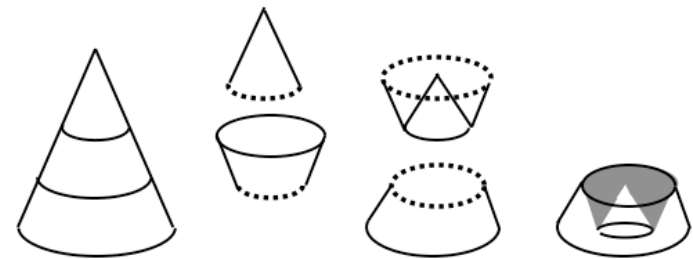
Jour 2 – Problème 13 – Le presse-citron

- Le volume du morceau du haut est $270 \times (1/3) \times (1/3)^2 = 10 \text{ cm}^3$
- Le volume total des morceaux du haut et du milieu est $270 \times (2/3) \times (2/3)^2 = 80 \text{ cm}^3$



Jour 2 – Problème 13 – Le presse-citron

- Le volume du morceau du milieu est $80 - 10 = 70 \text{ cm}^3$
- La réponse est $70 - 10 = \mathbf{60} \text{ cm}^3$



Jour 2 – Problème 14 – Le caddy

- Jusqu'à 70 inclus, nous comptons 10 multiples de 7
- Parmi les 5 pairs, nous pouvons en retenir au plus 2
- Le prix le plus grand est au moins 70
- Nous allons montrer que ce minimum est atteignable
- Nous devons retenir un multiple pair de 7 autre que 70
- Et 3 multiples impairs de 5 autres que 35 et 70

						Retenus
7	21	35	49	63	70	6
14	28	42	56			1
5	15 15	25	45 45	55	65	3

Jour 2 – Problème 14 – Le caddy

- **Si** nous retenons 42, alors il ne manque plus de multiple de 3, et nous devons retenir les 4 nombres 5, 25, 55 et 65 sauf un

						Retenus
7	21	35	49	63	70	6
		42				1
5		25		55	65	3

- $7 + 21 + 35 + 49 + 63 + 70 + 42 + 5 + 25 + 55 + 65 = 437$
- 437 est congru à 8 modulo 11
- 5, 25, 55 et 65 ne le sont pas
- D'où une contradiction

Jour 2 – Problème 14 – Le caddy

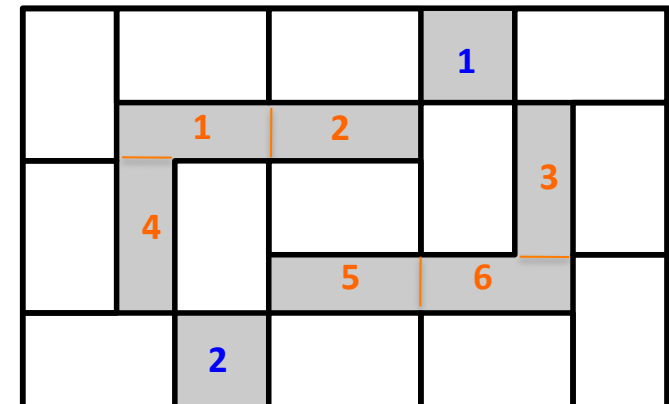
- Nous retenons
 - 7, 21, 35, 49, 63, 70 de total 245 (congru à -8 modulo 11)
 - Un nombre parmi 14, 28 et 56 (congru à **3**, 6 ou **1** modulo 11)
 - 15 ou 45
 - Deux nombres parmi 5, 25, 55 et 65

Somme Modulo 11	5 et 25	5 et 55	5 et 65	25 et 55	25 et 65	55 et 65
15	1	9	8	7	6	3
45	9	6	5	4	3	0

- D'où **2 réponses**
 - 7, 21, 35, 49, 63, 70, 14, 45, 5, 65 de total **374**
 - 7, 21, 35, 49, 63, 70, 56, 15, 25, 55 de total **396**

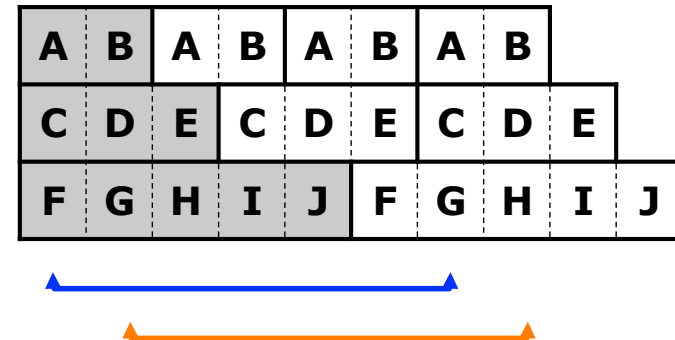
Jour 2 – Problème 15 – Le drapeau

- Soit X le rapport de la longueur à la largeur des petits rectangles et du grand rectangle
- $(3X + 2)/(2X + 1) = X$
- $X^2 - X - 1 = 0$, X est le nombre d'or $\Phi \approx 1,618$
- L'aire grise est 2×15^2
plus $6 \times 15\Phi \times 15(\Phi-1) = 6 \times (\Phi^2 - \Phi) \times 15^2$
- La réponse, unique, est $8 \times 15^2 = \mathbf{1800} \text{ cm}^2$
- *Note: si l'on considère que les notions de longueur et de largeur sont interchangeables (italien, russe), alors il y a une deuxième solution, ≈ 688*



Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

- Les sommes $(A+C+F)$ et $(A+C+G)$ sont forcément différentes, une et une seule est 10
- Les sommes $(B+D+G)$ et $(B+D+H)$ sont forcément différentes, une et une seule est 10
- Les 4 autres sommes sont 10



Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

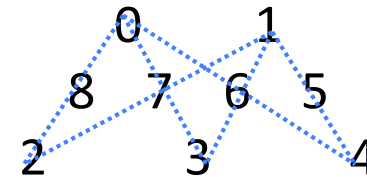
- La somme 10 est obtenue dans huit cas
- Seuls 0 et 1 sont dans quatre cas
- Seuls 2 et 3 sont dans trois cas
- A et B sont chacune dans trois sommes 10
- **Si** $A = 2$,
alors elle est dans un cas avec 0, 1 et 3,
B ne peut plus être dans trois cas
- De même **si** $A = 3$
- Et vice versa **si** $B = 2$ ou 3
- **A et B sont 0 et 1**

0	0	0	0	1	1	1	2
1	2	3	4	2	3	4	3
9	8	7	6	7	6	5	5

	0			1			2
	2			2			3
	8			7			5

Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

- 9 n'est plus dans aucune somme 10



- Toutes les lettres sauf G sont dans au moins une somme 10
- **G = 9**

0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0		
C	D	E	C	D	E	C	D	E	
F	G	H	I	J	F	G	H	I	J

└──────────────────────────────────┘
└──────────────────────────────────┘

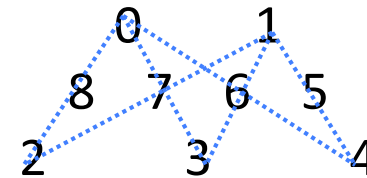
Jour 2 – Problème 16 – Les trois séries

- **F et H**, utilisés deux fois dans une somme 10, **sont 6 et 7**
- **I et J** (une fois) **sont 5 et 8**
- E est dans une somme 10 avec 6 et avec 7 (F et H)
- **E = 3**
- Nous terminons le tableau de deux façons
- La réponse, unique, est **41**

0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0		
C	D	E	C	D	E	C	D	E	
F	9	H	I	J	F	9	H	I	J

#10

#10



0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0	0/1	1/0		
4/2	2/4	3	4/2	2/4	3	4/2	2/4	3	
6/7	9	7/6	5/8	8/5	6/7	9	7/6	5/8	8/5
	12					13	8	8	
10	/	10	10	10	10	/	10	/	/
	13					12	11	5	

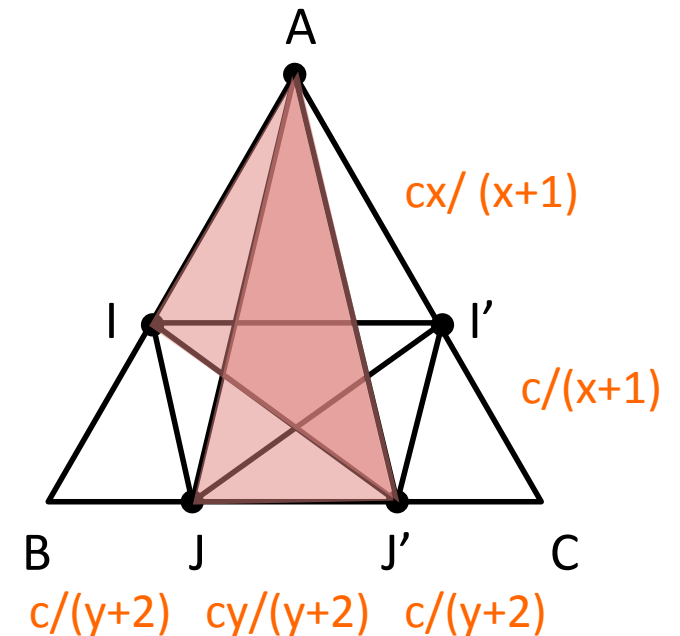
Jour 2 – Problème 17 – Les puissances

- En cherchant les puissances de 2 commençant par 10, nous trouvons
 - $2^{10} = 1\,024$
 - $2^{20} = 1\,048\,576$
 - $2^{30} = 1\,073\,741\,824$
 - $2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776 \approx 1,10 \cdot 10^{12}$ donné par l'énoncé
 - $2^{103} \approx 10\,141 \dots \approx 1,01 \cdot 10^{31}$ donné par l'énoncé
- Après $2^{113} \approx 1,04 \cdot 10^{34}$, $2^{123} \approx 1,06 \cdot 10^{37}$ et $2^{133} \approx 1,09 \cdot 10^{41}$, la candidate suivante est $2^{133+(103-40)} = 2^{196}$
- $2^{196} = (2^{103})^2 / 2^{10} > 1,01^2 / 1,024 \cdot 10^{59} > 1,02 / 1,024 \cdot 10^{59} > 0,995 \cdot 10^{59}$
- $2^{196} < 1,0142^2 / 1,024 \cdot 10^{59} < 1,029 / 1,024 \cdot 10^{59} < 1,005 \cdot 10^{59}$ ($1,42^2 < 6$)
- La réponse est **196**

Jour 2 – Problème 18 – Le panneau

- Nous supposons que le côté c du grand triangle est tel que l'aire est 1
- Nous multiplierons la réponse ainsi trouvée par 204
- Soient $x = IA/BI$ et $y = JJ'/BJ'$

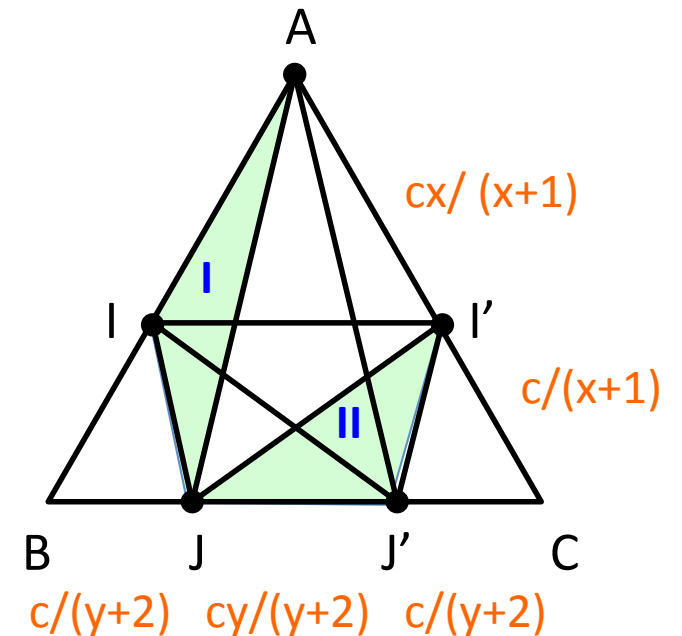
- L'aire du triangle **AIJ** ou **AI'J'** est $x/((x+1)(y+2))$ (I)
- Celle du triangle **AIJ'** ou **AI'J** est plus grande (base commune, hauteur plus grande)
- L'aire du triangle **IJJ'** ou **I'JJ'** est $y/((x+1)(y+2))$ (II)
- Celle du triangle **AJJ'** est plus grande (base commune, hauteur plus grande)



- Les aires des triangles **AII'**, **II'J** ou **II'J'** ne sont pas fonction de y

Jour 2 – Problème 18 – Le panneau

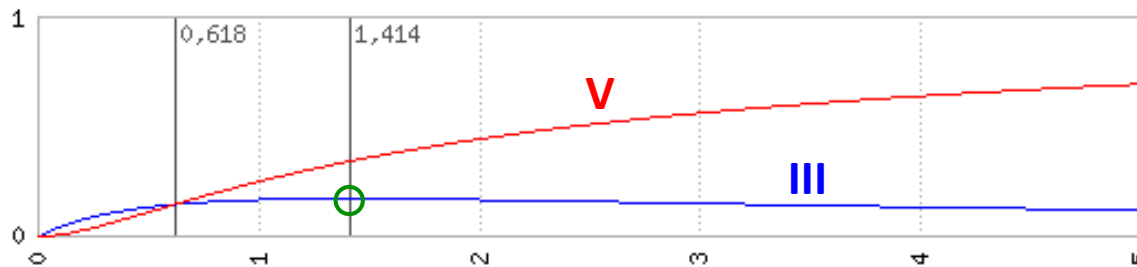
- Pour **AIJ** ou **AI'J'**, $x/((x+1)(y+2))$ **(I)**
- Pour **IJJ'** ou **I'JJ'**, $y/((x+1)(y+2))$ **(II)**
- Pour x donné, si $y \leq x$,
il faut augmenter y
pour rapprocher **(II)** de **(I)**
- Puis pour $x \leq y$, il faut diminuer
 $(y+2)$ soit y pour augmenter **(I)**
- $y = x$
- Nous retenons $x/((x+1)(x+2))$ **(III)**



Et symétriques par rapport à la verticale

Jour 2 – Problème 18 – Le panneau

- L'aire du triangle **II'** ou **II'J'** $x/(x+1)^2$ **(IV)** est plus grande que $x/((x+1)(x+2))$ **(III)**



- L'aire du triangle **AII'** $x^2/(x+1)^2$ **(V)** croit de 0 à 1
- $d(\text{III})/dx = (2-x^2)/((x+1)^2(x+2)^2)$
- **(III)** part de 0, passe au dessous de **(V)** en $1/\Phi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,618$ ($x^2+x-1 = 0$) et croit jusqu'à un maximum en $\sqrt{2} \approx 1,414$
- $\sqrt{2}/((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)) = (3-2\sqrt{2}) \approx 0,172$
- La réponse est $\approx 204 \times 0,172 = 35,088 \approx \mathbf{35} \text{ dm}^2$

