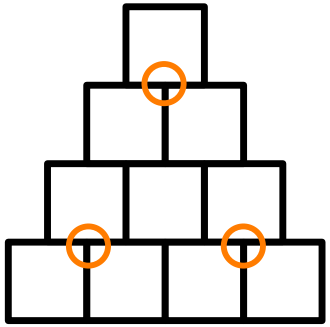
29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques

Finale Internationale des 27 et 28 août 2015

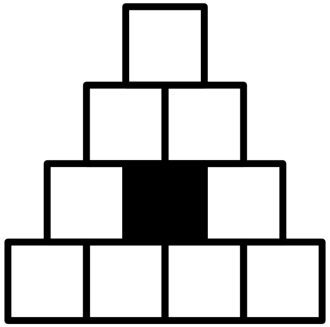
Solutions détaillées

Jour 1 – Problème 1 – La pyramide

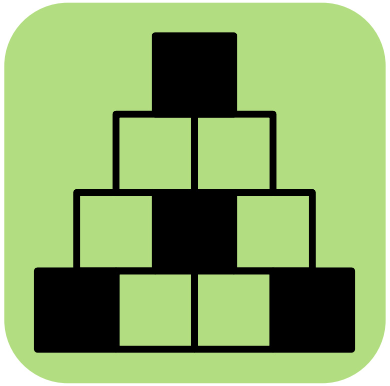
- Autour de chacun des trois points de contact cerclés, les trois cubes sont de couleurs différentes, il y a un cube noir



- Le quatrième cube noir est forcément au centre



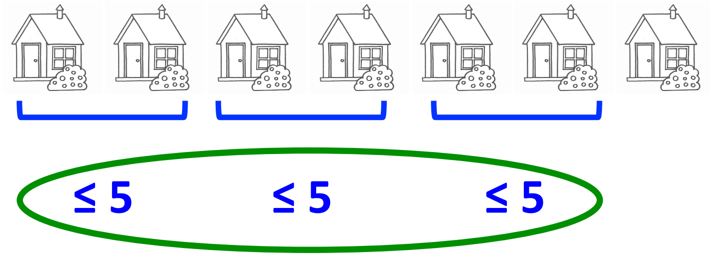
- Les trois autres cubes noirs ne le touchent pas



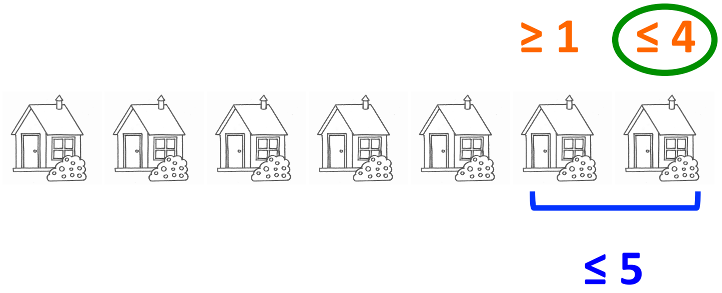
FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 2 – Le bord du lac

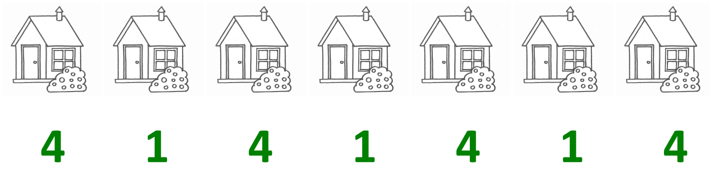
- Le nombre total de personnes habitant deux maisons voisines est au plus 5



- Chaque maison est habitée par au moins 1 personne



- Le nombre total de personnes habitant les sept maisons est au plus (3 x 5) + 4 = **19**
- *La configuration est unique*



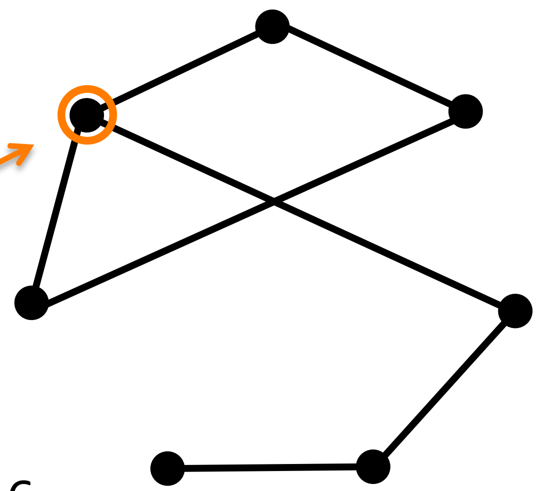
- *Note: si l'on considère que le bord du lac est circulaire, alors la réponse est 17 et plusieurs configurations sont possibles*

Jour 1 – Problème 3 – La constellation

- Chaque étoile est reliée à N autres étoiles

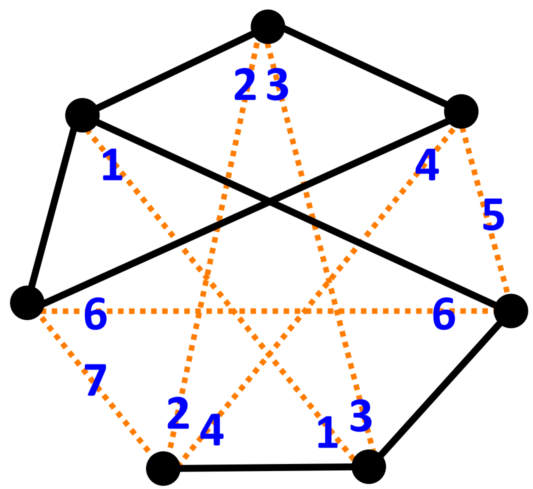
- En faisant le tour de toutes les étoiles, nous comptons deux fois le même segment
- 7 x N est le double du nombre de segments
- N est divisible par 2

- Une étoile est déjà reliée à **3** autres, N ≥ 4
- Aucune étoile n'est reliée à toutes les autres, N < 6
- N = 4



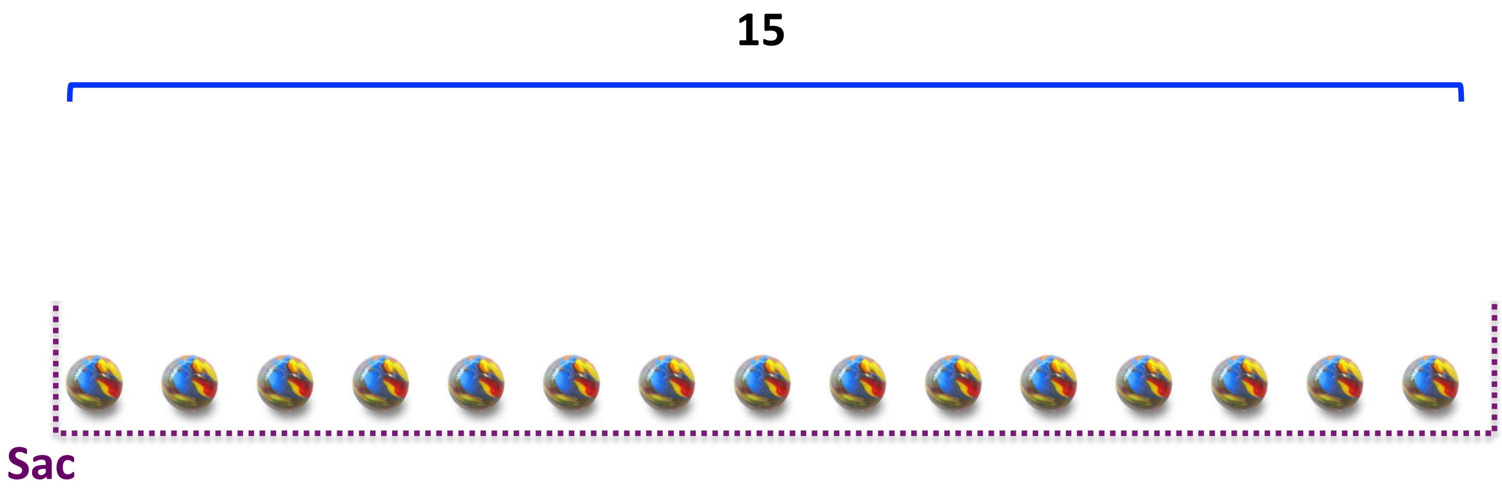
Jour 1 – Problème 3 – La constellation

- Le nombre total de segments est la moitié de 7 x 4 = 28, soit 14
- Il faut rajouter 14 – 7 = **7** segments aux 7 déjà tracés
- *La figure fournit un exemple, invariant par rotation ou symétrie*



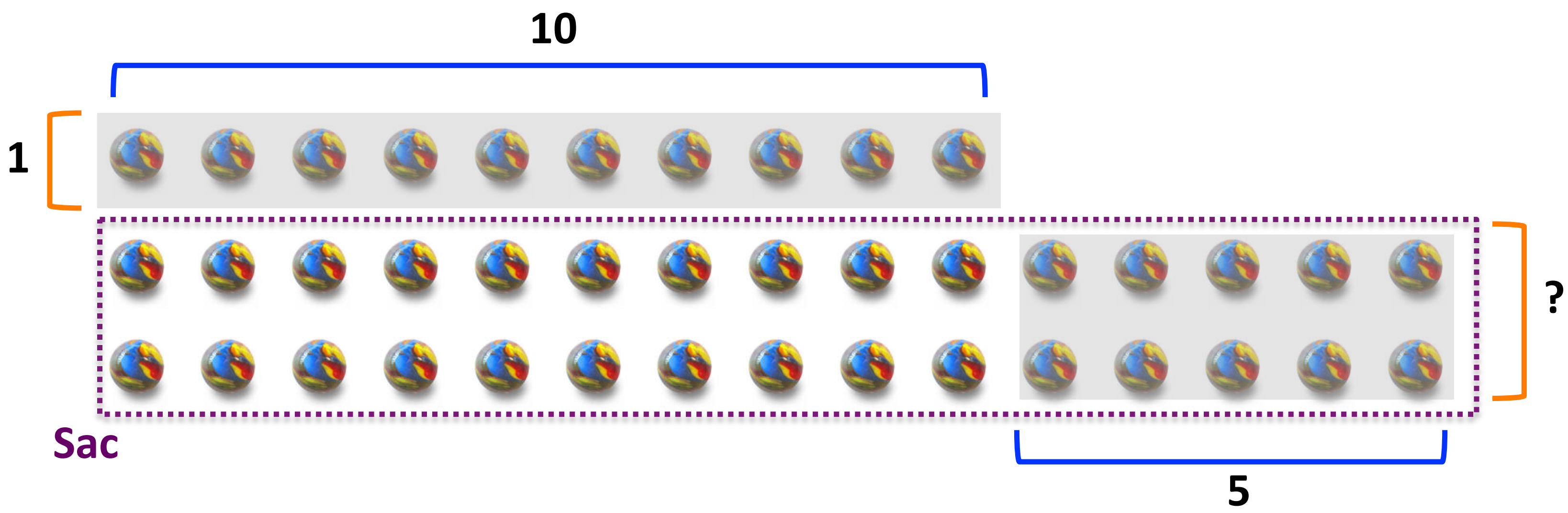
FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 4 – Le sac de billes



- Si le sac avait contenu 15 billes de moins,
  alors chacun d'eux aurait reçu 1 bille de moins
- Marble et ses amis sont au nombre de 15
  (*à l'horizontale sur le dessin*)

Jour 1 – Problème 4 – Le sac de billes



- S'ils avaient été 5 de moins, soit 10,
  alors chacun d'eux aurait reçu 1 bille de plus
- Le nombre de billes est le même dans les 2 rectangles gris sur le dessin
- ? = 2, le sac contenait 15 x 2 = **30** billes

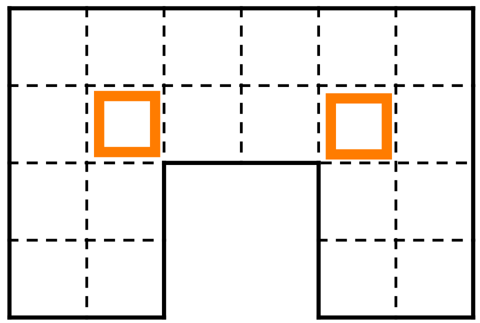
FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

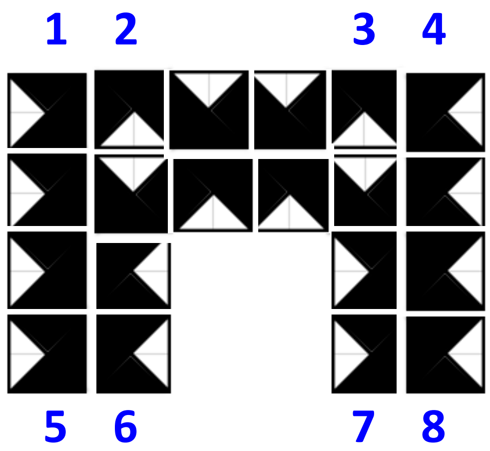
Jour 1 – Problème 5 – L'arc de triomphe

- Pour chacun des deux carrés oranges,
  il y a 1 triangle blanc lui appartenant
  et 1 autre appartenant à un carré voisin
- Ces 4 triangles blancs ne sont pas sur le bord
- Il reste 20 – 4 = 16 triangles blancs

- Il y a au moins 24 – 16 = **8** triangles noirs sur le bord

- *La figure fournit un exemple*





FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 6 – Les colocataires

- L'utilisation des deux salles de bain totalise
  21 + 20 +15 + 14 + 13 + 7 = 90 minutes
- 90 / 2 = 45

- 45 – 21 = 24 ne peut pas être obtenu avec 20, 15 ou 14
  (il manque 4, 9 ou 10), ni 13 + 7 = 20
- L'utilisation d'une salle de bain dépasse **45** minutes

- 46 – 21 = 25 ne peut pas être obtenu avec 20, 15 ou 14
  (il manque 5, 10 ou 11), ni 13 + 7 = 20
- 44 – 21 = 23 ne peut pas être obtenu avec 20, 15 ou 14
  (il manque 3, 8 ou 9), ni 13 + 7 = 20
- L'utilisation d'une salle de bain dépasse **46** minutes

Jour 1 – Problème 6 – Les colocataires

- L'utilisation d'une salle de bains peut être 20 + 14 + 13 = **47** minutes
  et celle de l'autre 21 + 15 + 7 = 43 minutes

- La première utilisation d'une salle de bain débute
  au plus tard 47 minutes avant 8 heures, soit **13 minutes** après 7 heures
  (elle finit alors à 8 heures pile)

Jour 1 – Problème 7 – Des 3 en plus

- Sur la ligne du milieu, la somme est au plus 31 + 73 + 73 = 177

4	61	7
31	73	73
67	1	1

- Nous n'ajoutons pas un 3 au 67 en bas à gauche car 177 est strictement inférieur à 367 et à 673

4	61	7
1	7	7
67	1	1

- Nous n'ajoutons pas un 3 au 61 en haut au milieu car 177 est strictement inférieur à 361 et à 613

4	61	7
1	7	7
67	1	1

Jour 1 – Problème 7 – Des 3 en plus

- Pour que la ligne du bas et la colonne du milieu aient la même somme, comme 67 + 1 = 61 + 7, soit les 7 et 1 sont inchangés, soit ils sont changés en 37 et 31

4	61	7
1	7	7
67	1	1

- Si les 7 et 1 sont inchangés, la somme sur la ligne du bas est 69, 81 ou 99

4	61	7
1	7	7
67	1	1

4	61	7
1	7	7
67	13	1

4	61	7
1	7	7
67	31	1

- Mais, sur la ligne du haut, cette somme est impossible à obtenir (il manque 8, 20 ou 38 en partant des 4 et 7)

Jour 1 – Problème 7 – Des 3 en plus

- Pour que la ligne du milieu et la colonne à gauche aient la même somme,
comme 67 – 37 = 30,
les 7 et 4 sont changés en 73 et 43

4	61	7
1	37	7
67	1	31

- Toutes les lignes et colonnes totalisent 111
sauf la ligne du bas et la colonne du milieu
- Le cinquième 3 doit être ajouté à leur intersection

43	61	7
1	37	73
67	1	31

- La somme constante est **111**
(*il n'y a qu'une seule façon de l'obtenir*)
- *Note: les deux diagonales ont aussi pour somme 111,*
le carré est magique et composé exclusivement de nombres premiers

43	61	7
1	37	73
67	13	31

Jour 1 – Problème 8 – La savane

- Après chaque opération, le nombre de zèbres et le nombre de hyènes restent de même parité
- En fonction de la situation de départ, l'équilibre est atteint lorsque chacun de ces deux nombres est 0
- En les additionnant à la fin, $20 - 2a = 0$ donne $a = 10$, puis $(b - c) = 3$
- Le nombre de lions à la fin, $2 + a - b - c = 2 + a - (b - c) - 2c = 9 - 2c$, est le plus grand possible pour $c = 0$
- La réponse est **9** animaux restants

	Zèbres	Hyènes	Lions
	7	13	2
a fois	*-1*	*-1*	*+1*
b fois	*+1*	*-1*	*-1*
c fois	*-1*	*+1*	*-1*
Résultat final	7-a+(b–c)	13-a-(b-c)	

Jour 1 – Problème 8 – La savane

- *Nous vérifions l'existence d'un processus sur un exemple*

	Zèbres	**Hyènes**	**Lions**
	7	13	2
7 fois	*-1*	*-1*	*+1*
Résultat	0	6	9
3 fois	*+1*	*-1*	*-1*
Résultat	3	3	6
3 fois	*-1*	*-1*	*+1*
Résultat final	0	0	9

Jour 1 – Problème 9 – Le fromage

- Soient E le poids de l'eau demandé et S le poids de l'extrait sec
- Le fromage titrait 45% de matière grasse par rapport à l'extrait sec

Extrait sec		Eau
Matière grasse		
(45/100)S	(55/100)S	E

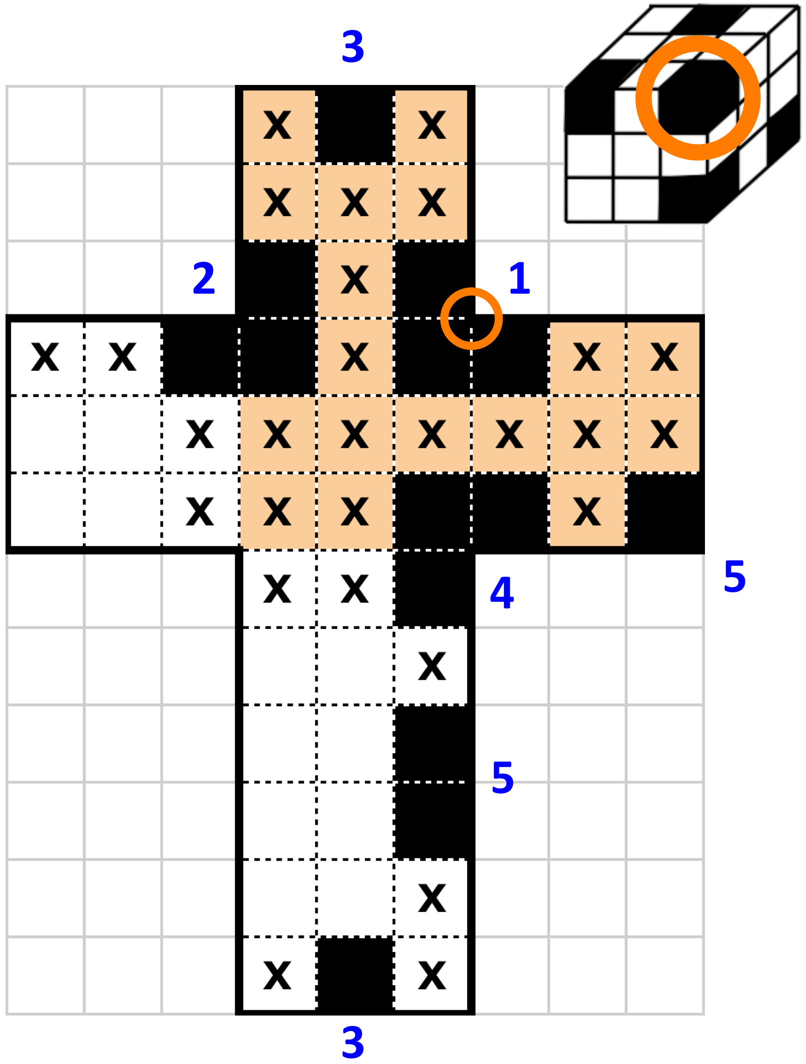
- Le fromage titre 22% de matière grasse sur produit fini
- $(45/100)S = (22/100)(E + S)$, soit $E = ((45 – 22)/45)(E+S)$

- Le fromage pèse 270 grammes, $E + S = 270$
- La réponse, unique, est $E = ((45 – 22)/45)\text{x}270 = 23\text{x}6 =$ **138** grammes

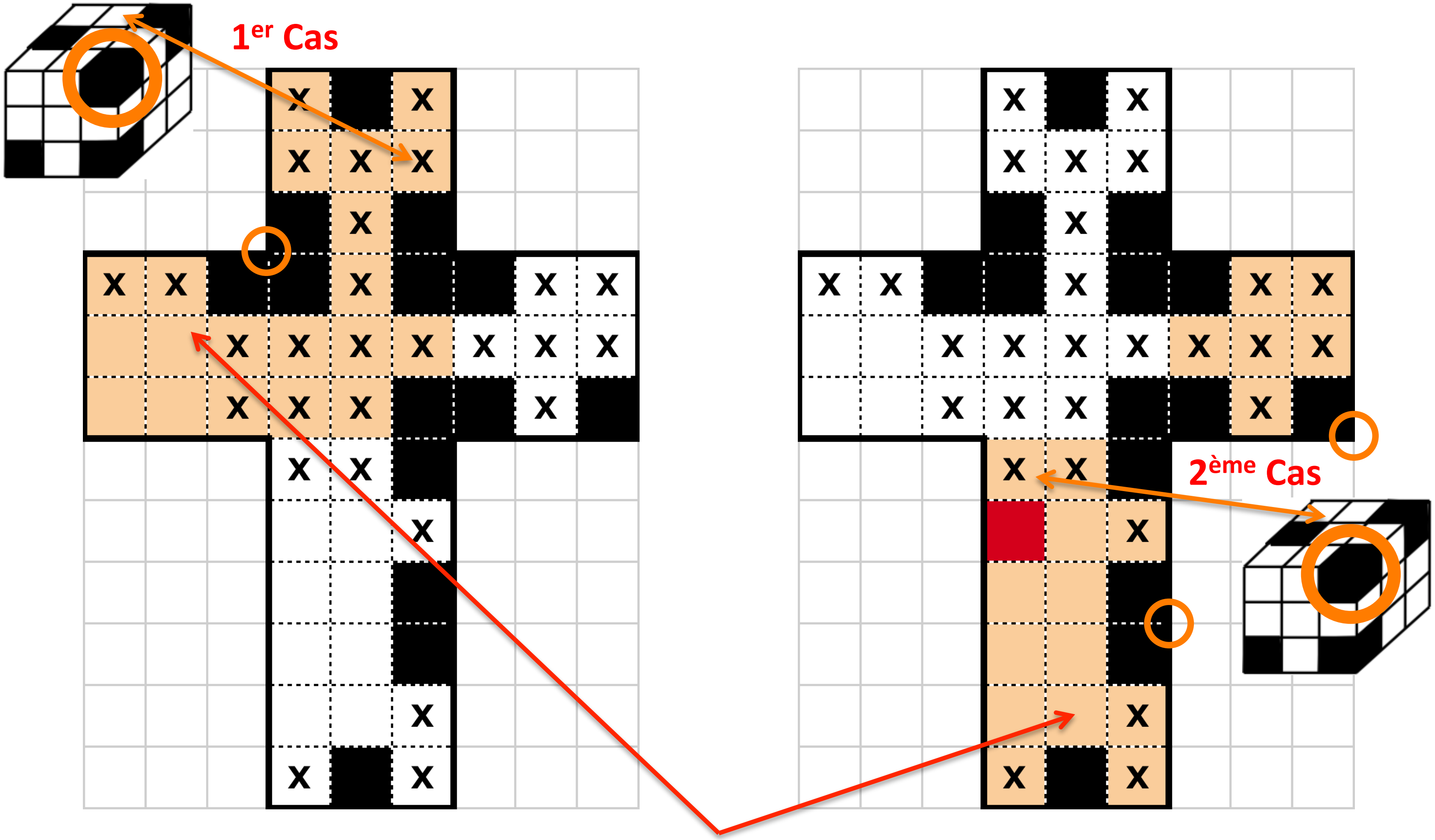
Jour 1 – Problème 10 – Les deux vues

- Nous commençons par la vue à gauche de l'énoncé
- Les 3 faces visibles sont colorées sur le patron
- Nous renseignons également les faces non visibles

- Nous continuerons par la vue à droite de l'énoncé
- Nous chercherons sur le patron la face visible au dessus (**3 Cas**)



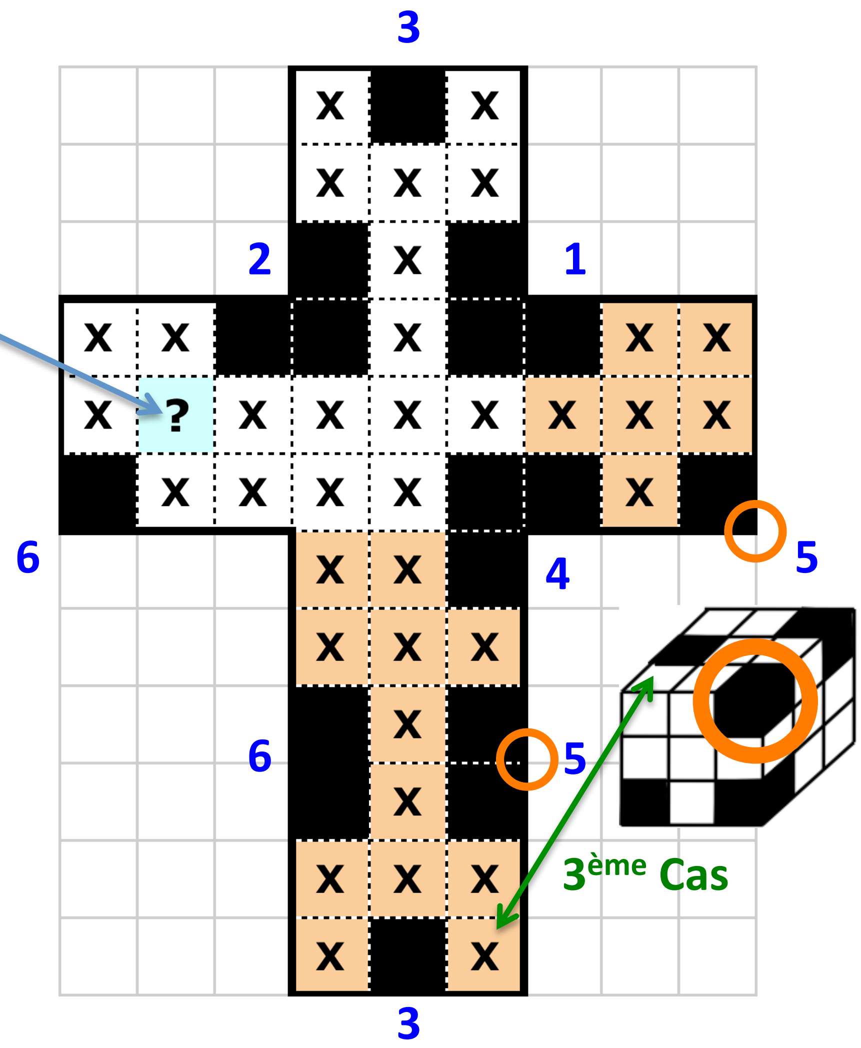
Jour 1 – Problème 10 – Les deux vues



- La face visible de face ne peut pas correspondre

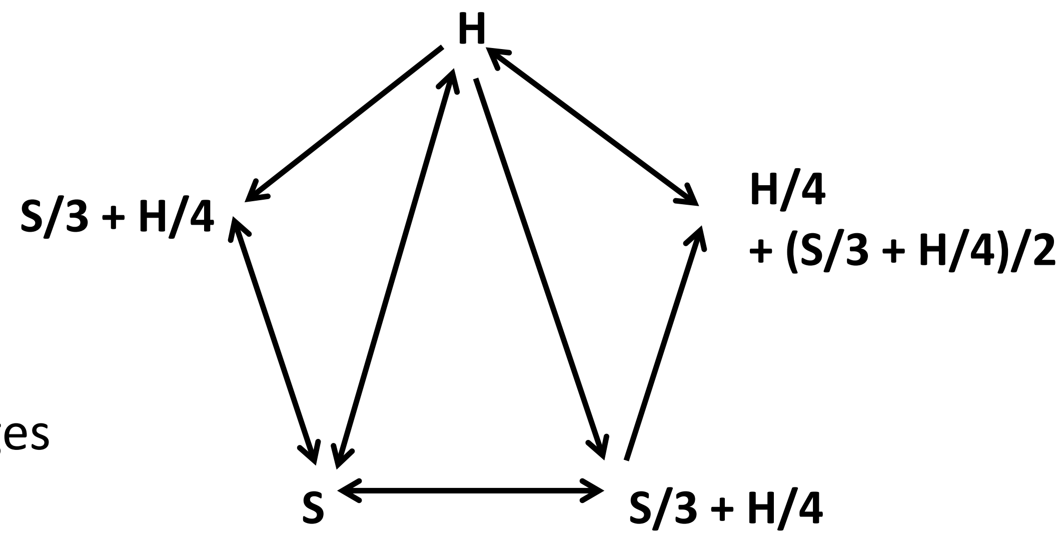
Jour 1 – Problème 10 – Les deux vues

- (**3ème Cas**) Nous ne pouvons rien dire pour ce petit cube ni pour **celui au centre du grand cube** (absent du patron)
- Le nombre de petits cubes noirs est pair
- Il y a **2 réponses**, **6** ou **8** petits cubes noirs



Jour 1 – Problème 11 – Les pages internet (les noisettes dans la version étrangère)

- Soit S le nombre demandé
- Soit H celui de la page (cachette) en haut
- Les 3 autres sont calculés en fonction de ce que les pages (cachettes) reçoivent

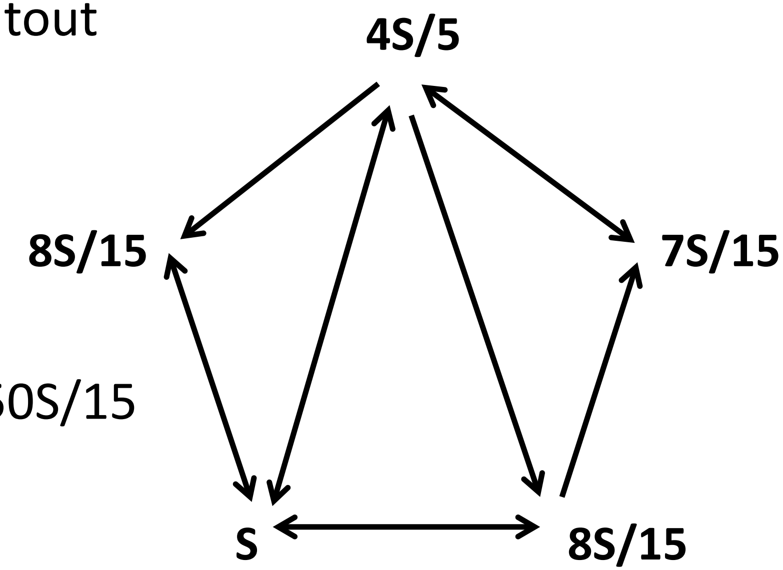


FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 11 – Les pages internet (les noisettes dans la version étrangère)

- La page (cachette) à droite donne tout à la page (cachette) en haut
- $H/4 + (S/3 + H/4)/2 = H – S/3$
- $H = 4S/5$

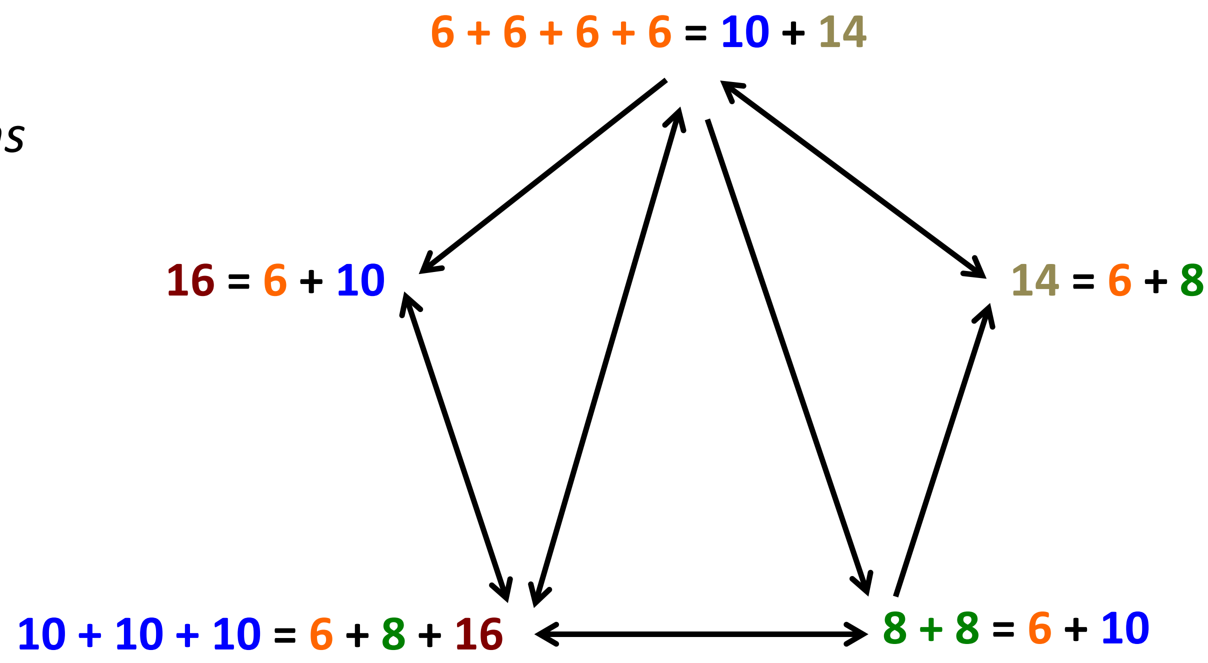
- Le total des 5 nombres est $100 = 50S/15$
- La réponse, unique, est S = **30**



Jour 1 – Problème 11 – Les pages internet (les noisettes dans la version étrangère)

- *Nous vérifions*

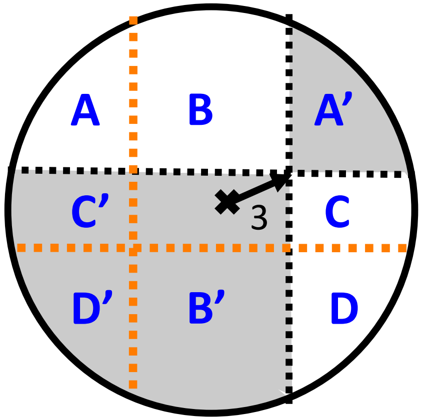
donne = reçoit



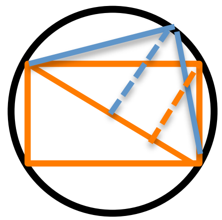
24 + 16 + 14 + 30 + 16 = 100

Jour 1 – Problème 12 – La tarte

- Par symétries, les aires grises A', B', C' et D' sont respectivement égales aux aires blanches A, B, C et D
- La différence des 2 parts est l'aire du rectangle



- L'aire d'un rectangle inscrit dans un cercle (ici, de rayon 3), produit du diamètre par la hauteur d'un triangle rectangle « moitié », est maximale lorsque cette hauteur est maximale, c'est-à-dire lorsque le rectangle est carré



- La réponse est $(3\sqrt{2})^2 =$ **18** cm^2

FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre (version étrangère)

- **3 Cas** sont possibles
  - Lorsque la somme des deux derniers chiffres est (10 + N) avec $0 \leq N \leq 8$, l'opération donne **10..0**, **11..1**, … , **18..8** ou **11..0**, **12..1**, … , **19..8**
  - Lorsqu'elle est 9, l'opération donne **9…9** ou **10..9**
  - Lorsqu'elle est N avec $2 \leq N \leq 8$ (pas de 0 aux extrémités), l'opération donne **2…2**, **3…3**, … , **8…8** ou **3…2**, **4…3**, … , **9…8**

- Le 6ème nombre est 17347 (**1er Cas**)

- X = 9 (**3ème Cas** pour le 5ème nombre)

	0	*0*	*1*	
	X	Y	3-Y	17-X
	17-X	3-Y	Y	X
1	7	3	4	7

FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre (version étrangère)

- 4-Y = Y, Y = 2
- Le 5ème nombre est 9218

- **Si** nous sommes dans le **3ème Cas** pour le 4ème nombre, alors Z = 4, 1 + (21-T) = T, T = 11 > 9
- Nous sommes dans le **1er Cas**, Z = 1

- 1 + 2U = (21-T), T = 8, U = 6
- Le 4ème nombre est 1837
- Le 3ème nombre est 968 (**3ème Cas**)

1	*1*	*0*	
Z	T	13-Y-T	8-Z
8-Z	13-Y-T	T	Z
9	Y	3-Y	8

0	*1*	*0*	
4	T	11-T	**4**

1	*1*	*1*	
	9	U	8
	8	U	9
1	T	11-T	7

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre (version étrangère)

- W= 8
- Si nous sommes dans le **1er Cas** pour le 2ème nombre, alors V = 1 et le 1er nombre est **89** ou **98**
- Si nous sommes dans le **3ème Cas** , alors V = 4 et le 1er nombre est **143**, **242** ou **341**
- Il y a **5 réponses**

1	*0*	
V	W	8-V
8-V	W	V
9	6	8

1	*1*	
V	8	8-V

FFJM - 29^{e} Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 13 – Devine nombre (version étrangère)

- *Nous vérifions dans le sens inverse*

<table>
<tr><th>1</th><th>+</th><th>2</th><th>+</th><th>3</th><th>+</th><th>4</th><th>+</th><th>5</th><th>+</th><th>6</th></tr>
<tr><td>89 ou 98</td><td>98 ou 89</td><td>187</td><td>781</td><td rowspan="2">968</td><td rowspan="2">869</td><td rowspan="2">1837</td><td rowspan="2">7381</td><td rowspan="2">9218</td><td rowspan="2">8129</td><td rowspan="2">17347</td></tr>
<tr><td>143 ou 341
ou 242</td><td>341 ou 143
ou 242</td><td>484</td><td>484</td></tr>
</table>

- *Note: dans la version en français,*
  le dernier chiffre à gauche est strictement inférieur au dernier chiffre à droite,
  ce qui limite le nombre de solutions à deux, 89 et 143

Jour 1 – Problème 14 – Le cryptarithme

- $I \neq 1$ et $N \neq 1$,
  sinon IAL x NFE < 200 x 700 = 140000
  et F = 1 (doublon)
- $L \neq 1$, sinon IEA x LFN < 200 x 700 = 140000
  et F = 1 (doublon)

IAL x NFE = FINALE (1)

IEA x LFN = FINALE (2)

- $E \neq 1$, sinon à droite L = 1 (doublon)
- $A \neq 1$, sinon à droite N = E (doublon)

IAL x NF1 = FINAL1 (1)
IE1 x LFN = FIN1LE (2)

- F = 1

Jour 1 – Problème 14 – Le cryptarithme

- A droite, LE est congru à E modulo 10 ($L \neq 1$)
- E = 5 (L impair) ou L = 6 (E pair), sinon E = 0

IAL x N1E = 1INALE (1)

- $E \neq 5$, sinon à droite A ou N serait 5 (doublon)

I5A x L1N = 1INAL5 (2)

- Si $E \neq 0$, alors L = 6 et E est 2 ou 4
- Mais à droite AN n'est pas congru à E modulo 10 (restent 4 ou 2, 0 et 5)

IEA x 61N = 1INA6E (2)

- Si E = 0 et A = 5 (N pair), alors à droite (modulo 100) 10 + N = 2L, N = 2 et L = 6, I = 4
- Mais 405 x 612 > 400 x 600 = 240000 > 142560

I05 x L1N = 1IN5L0 (2)

Jour 1 – Problème 14 – Le cryptarithme

- E = 0 et N = 5 (A pair)
- Restent 2, 4 et 6

IAL x 510 = 1I5AL0 (1)

- 5I < 10 + I + 1, I = 2
- 264 x 510 = 134640 > 125640
- A = 4 et L = 6, 246 x 510 = 125460
- Nous vérifions que 204 x 615 = 125460 (2)
- La réponse, unique, est **125460**

FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 15 – Les suites de l'année

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	**2**	2	2	2	2	**0**	2	0	2	0	**1**	2	0	1	2	**5**	…

- Les termes N° 5Q et N° Q sont les mêmes

N°	1	2	3	4		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	**2**	2	2	2	2	**0**	2	0	2	0	**1**	2	0	1	2	**5**	…

Q = 1

N°	1	2	3	4		6	7	8	9		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	**2**	2	2	2	2	**0**	2	0	2	0	**1**	2	0	1	2	**5**	…

Q = 2

N°	1	2	3	4		6	7	8	9		11	12	13	14		16	17	18	19	20	
	2	0	1	5	**2**	2	2	2	2	**0**	2	0	2	0	**1**	2	0	1	2	**5**	…

Q = 3 …

- Les termes N° (5**Q** + R), avec 0 < R < 5, et N° (4**Q** + R) sont les mêmes

FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 15 – Les suites de l'année

- La réponse est le N° **2019**

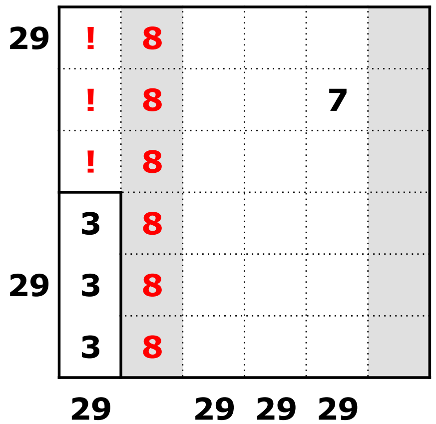
2015	2016	2017	2018	2019
403	1613	1614	1615	1616
323	~~1291~~	~~1292~~	323	1293
259	1033	1034		1035
208	827	828		207
167	662	663		166
134	530	531		133
108	106	425		107
87	85	85		86
70	17			69
14	14			56
12				45
10				9 8 7 6 5
2				1
Terme **0**	**0**	**0**	**0**	**2**

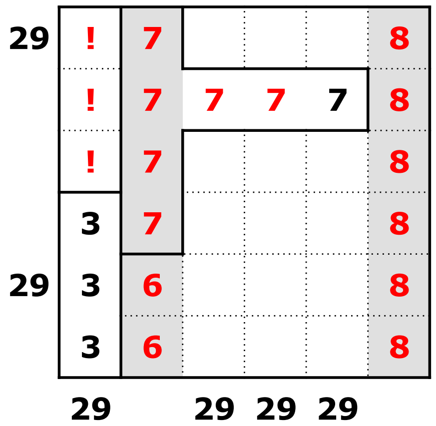
Jour 1 – Problème 16 – Le partage

- La **somme des nombres dans les 2 colonnes sans indice** est $1^2 + 2^2 + \dots 8^2 - (4x29) = 88$

- Elle n'est **pas** obtenue avec **7 ni 8 huit** car il en faudrait 3 de plus pour connecter les 2 colonnes
- **Si** elle est obtenue avec **6 huit**, alors ils sont tous dans une seule colonne, la 1ère colonne est impossible car on y trouve 3 trois et 3 nombres de somme 20 sans six ni sept
- Elle n'est **pas** obtenue avec **moins de 5 huit** car (4x8) + (6x7) + (2x6) = 86 < 88

- Elle est obtenue avec **5 huit, 6 sept et 1 six**





FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 16 – Le partage

- Les 6 **sept** sont dans une seule colonne, forcément la 6ème (connexion au 7 déjà écrit)

29	8	8	!	!	!	7
	6				7	7
	6					7
	3					7
29	3					7
	3					7
	29		29	29	29	

- Il y a 1 **huit** et 2 **six** dans la 1ère colonne
- Le **huit** ne peut pas être en haut car la 1ère ligne serait impossible (3 nombres de somme 6)
- Il ne peut pas être inséré entre les 2 **six** (connexion des **six**)
- Le huit est en bas

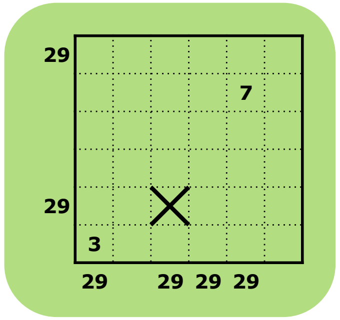
29	6	6	6	6		7
	8	8	8		7	7
	6	6				7
	3					7
29	3					7
	3					7
	29		29	29	29	

Jour 1 – Problème 16 – Le partage

- Dans la 2ème colonne,
  le **six** est en haut (connexion)
- Nous terminons la 1ère ligne
  avec 1 **six** (connexion) et 2 **deux** (29)
- Nous terminons la 5ème colonne
  avec 4 **cinq** (29 sans le dernier six)

29	6	6	6	2	2	7
	6	8	6		7	7
	8	8			5	7
	3	8			5	7
29	3	8			5	7
	3	8			5	7
	29		29	29	29	

- Nous terminons la 5ème
  ligne avec **un** et 1 **cinq** (29)
- La réponse est unique

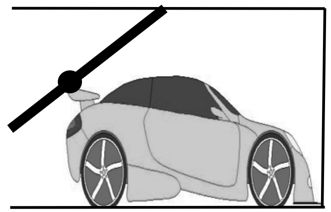


- *Nous terminons la 6ème ligne*
  avec 2 ***huit****, la 3ème colonne*
  avec 2 ***quatre*** *(29), etc.*

29	6	6	6	2	2	7
	6	8	6	6	7	7
	8	8	4	4	5	7
	3	8	4	4	5	7
29	3	8	1	5	5	7
	3	8	8	8	5	7
	29		29	29	29	

FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

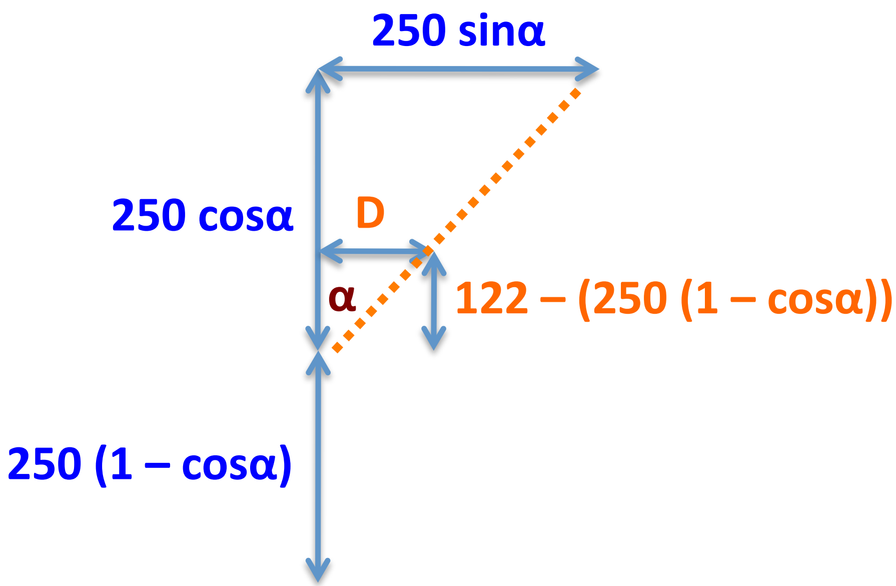
Jour 1 – Problème 17 – La porte de garage



- D cotα = 122 – (250 (1-cosα))
- D = 250 sinα – 128 tanα

- **d**D/**d**α = 250(cos³α – (4/5)³)/cos²α
- Lorsque la porte s'ouvre,
  D croit de 0 à un maximum pour
  un angle dont le cosinus est 4/5
  (et le sinus 3/5)

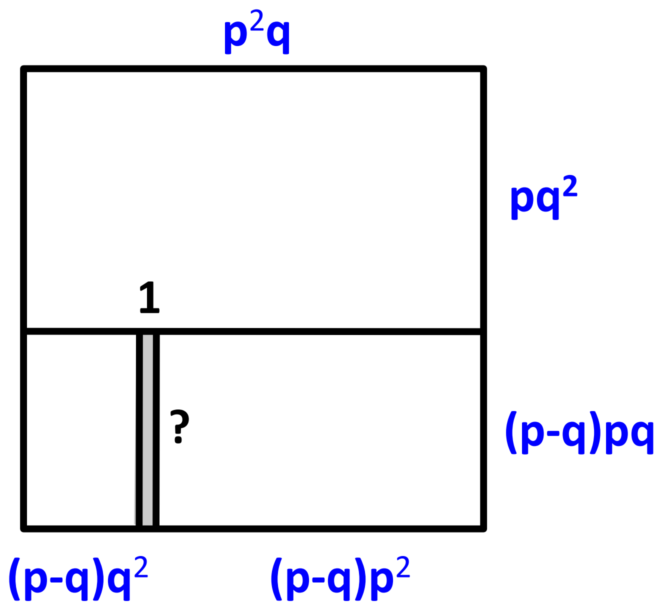
- La réponse est
  (250x3/5) – (128x3/4) = **54** cm



FFJM - 29e Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques - Finale

Jour 1 – Problème 18 – Le lotissement

- Soit p/q le rapport de la longueur à la largeur d'un rectangle (p et q premiers entre eux)
- En raisonnant sur les divisibilités, nous trouvons les expressions ci-contre
- $p^3 - 2p^2q + pq^2 - q^3 + 1 = 0$ (à l'horizontale)
- En limitant les tests aux valeurs pour lesquelles $p^2q \leq 250$, nous trouvons, pour p/q = 7/4, l'unique réponse **84** m



- *Selon des théorèmes (Thue, Mordell) sur les cubiques, l'équation a 3 solutions dont 2 imaginaires.*
  Borner le périmètre n'était pas nécessaire à l'unicité de la réponse