XVIII Międzynarodowe Mistrzostwa w Grach Matematycznych i Logicznych
II Mistrzostwa Polski w GMiL

Finał krajowy – II etap 16 maja 2004

CE : zadania o numerach od **1** do **5**; czas - **60** minut
CM : zadania o numerach od **3** do **8**; czas - **90** minut
C1 : zadania o numerach od **5** do **11**; czas - **120** minut
C2 : zadania o numerach od **7** do **13**; czas - **180** minut
L1 i **GP**: zadania o numerach od **7** do **16**; czas - **180** min.
L2 i **HC**: zadania o numerach od **7** do **18**; czas - **180** min.

WAŻNE !!! Wyniki liczbowe należy wpisać w odpowiedniej ramce Karcie odpowiedzi.

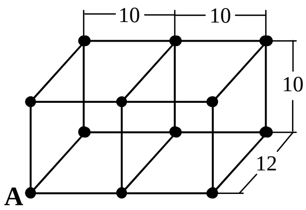
Kartę wypełniać czytelnie, bez skreśleń i poprawek.

ZADANIA

POCZĄTEK KATEGORII CE

1 – Kod jest liczbą trzycyfrową, w której suma cyfr jest równa 15, a cyfra jedności jest trzykrotnie większa od cyfry setek. **Podaj dwa takie kody trzycyfrowe**.

2 - Na rysunku obok pokazana jest siatka przestrzenna



przedstawiająca prostopadłościan o wymiarach: 20 cm, 12 cm, 10 cm, który powstał z połączenia dwóch mniejszych prostopadłościanów. Mrówka znajduje się w węźle A i chce odwiedzić wszystkie 11 z pozostałych węzłów, a następnie powrócić do węzła A. Cały ten spacer chce odbyć po możliwie najkrótszej drodze. **Padaj w centymetrach długość drogi, po której odbędzie ten spacer.**

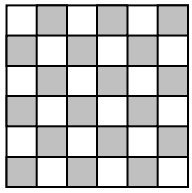
POCZĄTEK KATEGORII CM

3 – Myszki A, B, C, D i E biorą udział w rewii i w przerwie występów porównują wielkości swoich kokardek. Kokardka myszki A jest większa niż kokardka myszki B. Kokardka myszki B jest mniejsza od kokardek myszek C i D. Myszka E ma kokardkę większą niż myszka D i mniejszą niż myszka C. Zauważyły też, że kokardka myszki C nie jest największa. **Ustawić te 5 myszek od lewej do prawej według wielkości ich kokardek i tak, by pierwsza z lewej miała kokardkę najmniejszą.**

4 – Marek zauważył, że liczby 279 i 280 są kolejnymi liczbami naturalnymi o takiej własności, że mniejsza ma sumę cyfr podzielną przez 6, a większa ma sumę cyfr podzielną przez 5. **Znajdź mniejsze, również kolejne liczby naturalne o tej samej własności.**

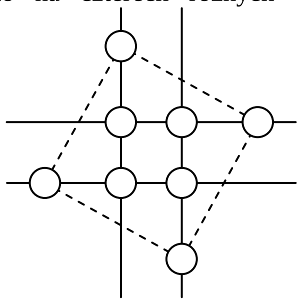
POCZĄTEK KATEGORII C1

5 – Na niektórych polach planszy 6×6 ustawiono po jednym pionku, a pozostałe pola tej planszy są puste. Agnieszka pozliczyła pionki ustawione na polach kolejnych linii poziomych planszy i otrzymała 6 różnych liczb całkowitych. Bartek zlicza pionki ustawione na polach kolejnych linii pionowych planszy i stwierdza ze zdumieniem, że żadna z otrzymanych przez niego liczb nie występuje wśród liczb otrzymanych przez Agnieszkę. **Podaj, w kolejności rosnącej, sześć liczb otrzymanych przez Agnieszkę.**



KONIEC KATEGORII CE

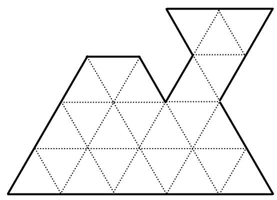
6 – Osiem kółek rozmieszczono na czterech różnych liniach prostych tak, że na każdej z nich znalazły się trzy kółka. W kółka te należy wpisać liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 w taki sposób, aby suma trzech liczb wpisanych w kółka leżące na tej samej linii prostej była zawsze taka sama, a suma liczb wpisanych w cztery kółka tworzące wewnętrzny kwadrat była dwukrotnie większa od sumy liczb wpisanych w cztery kółka tworzące zewnętrzny kwadrat. **Podać, w kolejności rosnącej, liczby wpisane w kółka tworzące wewnętrzny kwadrat.**



POCZĄTEK KATEGORII C2, L1, L2, GP, HC

7 – W trakcie meczu piłki ręcznej pomiędzy drużynami A i B, który zakończył się wynikiem 23:19 (na korzyść drużyny A) miał miejsce taki moment, w którym drużyna A miała tyle zdobytych bramek, ile bramek zdobyła drużyna B w pozostałej, do końca, części meczu ? **Podać, ile w tym momencie miały zdobytych bramek łącznie obie drużyny.**

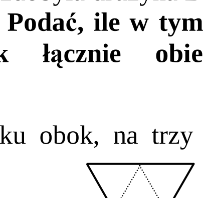
8 – Podzielić figurę, pokazaną na rysunku obok, na trzy jednakowe części dające się nałożyć jedna na drugą przez przesuwanie i obracanie, ale bez odwracania na drugą stronę. Linie podziału zaznaczyć starannie pogrubionymi kreskami w Karcie odpowiedzi.



KONIEC KATEGORII CM

9 – Liczby 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 i 20 rozdzielamy na dwie grupy L (licznik) i M (mianownik) po 5 liczb w każdej grupie tak, aby wynik dzielenia iloczynu liczb występujących w grupie L przez iloczyn liczb występujących w grupie M był liczbą całkowitą najmniejszą z możliwych. **Podaj, w kolejności rosnącej, 5 liczb które umieściłeś /-aś/ w grupie L.**

10 – Król szachowy odbywa spacer po polach planszy (pokazanej na rys. obok) według reguł gry w szachy. Wystartował ze środka pewnego pola i powrócił na to samo pole, a na każdym innym polu był dokładnie jeden raz. Porusza się zawsze ze środka pola do środka następnego pola po odcinkach łączących te środki. Jego droga jest łamaną składającą się tylko z dwóch rodzajów odcinków, krótszych i dłuższych, łączących środki dwóch pól mających albo wspólny bok albo tylko wspólny wierzchołek. Na rysunku pokazany jest fragment możliwej łamanej złożony z czterech odcinków. **Ile dłuższych odcinków znajdzie się w najdłuższej drodze króla ?**



11 – Jasio, ze zbioru 13 liczb naturalnych 1, 2, 3, ... , 13 usunął jedną liczbę, a pozostałe ustawił w 6 par. Obliczył sumę liczb w każdej parze i ze zdziwieniem zauważył, że otrzymał 6 kolejnych liczb naturalnych. Z kolei Joasia skreśliła również jedną, inną liczbę naturalną spośród liczb 1, 2, 3, ... , 13 i, postępując dalej podobnie jak Jasio, otrzymała 6 kolejnych liczb naturalnych, których suma była jednak większa od sumy sześciu kolejnych liczb naturalnych Jasia. W rozwiązaniu Joasi, w jednej parze znalazły się liczby 6 i 9. **W Karcie odpowiedzi podaj wszystkie pary utworzone przez Joasię łącznie z parą (6,9) w takiej kolejności, aby sumy liczb w kolejnych parach tworzyły ciąg rosnący.** Uwaga: w każdej parze na pierwszym miejscu wypisać liczbę mniejszą.

KONIEC KATEGORII C1

12 – Z przedziału domkniętego [0,2] wybieramy pięć liczb x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i obliczamy iloczyn

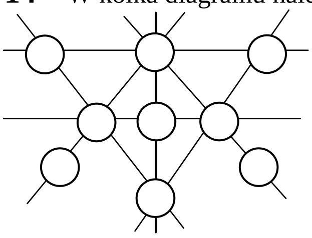
$$W = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_1) .$$

Jaki największy wynik możemy otrzymać ? W Karcie odpowiedzi podać maksymalną wartość W oraz liczby x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dla których ta maksymalna wartość jest osiągnięta.

13 – Liczbę 6 możemy przedstawić w postaci sumy trzech różnych składników 1, 2 i 3 (6=1+2+3), które mają taką własność, że suma dowolnych dwóch jest podzielna bez reszty przez ich różnicę. Np. 3+1=2 dzieli się przez 3-1=2. **Przedstawić liczbę 45 w postaci sumy $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ pięciu różnych składników naturalnych tak, aby suma x_i+x_j dowolnych dwóch z tych składników, $i \neq j$, dzieliła się bez reszty przez różnicę x_i-x_j .**

KONIEC KATEGORII C2

14 – W kółka diagramu należy wpisać liczby naturalne od 1 do 9 tak, aby suma trzech liczb wpisanych w kółka leżące na tej samej linii prostej była zawsze taka sama. Podać dwa rozwiązania, w których sumy trzech liczb wpisanych w kółka leżące na górnej, poziomej linii prostej są różne.



15 – W trójkącie ostrokątnym ABC dany jest promień koła opisanego R = 12 cm i promień koła wpisanego r = 8 cm. W trójkącie tym rysujemy trzy koła o takim samym promieniu ρ , z których każde jest styczne do ramion innego kąta tego trójkąta i które nie mają wspólnego punktu wewnętrznego. **Jaką największą wartość może mieć ρ ?**
Zadanie to unieważniono, ze względu na złe dane. (Iloraz R/r nie może być mniejszy niż 2). Rozwiązać to zadanie przy R = 14 cm, r = 6 cm.

16 – W liczbie pięciocyfrowej jedna z cyfr jest zerem. Jeżeli usuniemy tę cyfrę i nie zmieniając porządku pozostałych cyfr utworzymy liczbę czterocyfrową, to iloczyn tej liczby przez 9 daje w wyniku wyjściową liczbę. **Podać wszystkie liczby pięciocyfrowe o takiej własności.**

KONIEC KATEGORII L1 i GP

17 – Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ spełnia warunki:

$$|f(-1)| \le 1 , \quad |f(0)| \le 1 \quad \text{i} \quad |f(1)| \le 1 .$$

Jaką największą wartość funkcja ta może osiągnąć na przedziale < 0 , 1 > ?

18 – Wielościan wypukły W spełnia dwa następujące warunki:
* Każdy czworościan zawarty w W ma objętość $\le$ 1 dm^3,
** Dla każdego punktu Q leżącego na zewnątrz W można znaleźć trzy punkty P_1 , P_2 , P_3 należące do wielościanu W takie, że czworościan $P_1 P_2 P_3$ Q ma objętość > 1 dm^3,
a ponadto W jest wielościanem o najmniejszej liczbie wierzchołków w zbiorze wszystkich wielościanów spełniających powyższe dwa warunki.

Ile wierzchołków ma wielościan W i jaką ma objętość ?

KONIEC KATEGORII L2 i HC

POWODZENIA !