XVIII Międzynarodowe Mistrzostwa w Grach Matematycznych i Logicznych
II Mistrzostwa Polski w GMiL

Finał krajowy – I etap **15 maja 2004**

CE : zadania o numerach od **1** do **5**; czas - **60** minut

CM : zadania o numerach od **3** do **8**; czas - **90** minut

C1 : zadania o numerach od **5** do **11**; czas - **120** minut

C2 : zadania o numerach od **7** do **13**; czas - **180** minut

L1 i **GP**: zadania o numerach od **7** do **16**; czas - **180** min.

L2 i **HC**: zadania o numerach od **7** do **18**; czas - **180** min.

WAŻNE !!! Wyniki liczbowe należy wpisać w odpowiedniej ramce Karcie odpowiedzi.

ZADANIA

POCZĄTEK KATEGORII CE

1 – Znajdź regułę, według której powstają kolejne wyrazy ciągu liczbowego

22, 11, 16, 8, 4, 2, 1, 6, 3, $\square$, $\square$

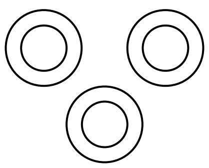
i wpisz w ramki dwa następne wyrazy tego ciągu.

2 - Beata ma dwa razy więcej cukierków niż Ania, a Celina ma o trzy cukierki więcej niż Ania i o jeden cukierek mniej niż Beata. **Ile cukierków ma każda z tych dziewczynek ?**

POCZĄTEK KATEGORII CM

3 – Marek i Darek wielokrotnie rozgrywają partie ulubionej gry, w której nie ma remisów i w której zwycięzca otrzymuje jeden albo dwa punkty, a przegrany zero punktów. Wczoraj rozegrali pewną liczbę partii. Marek zdobył łącznie 11 punktów i wygrał o jedną partię więcej niż Darek, a Darek zdobył łącznie tylko 7 punktów. **Ile, co najmniej, rozegrali partii ?**

4 – Dwanaście orzechów rozłożono na trzech talerzykach kładąc na dwóch talerzykach po 2 orzechy, a na trzecim talerzyku 8 orzechów. W każdym ruchu możemy wybrać dwa niepuste talerzyki, wziąć z każdego z nich po jednym orzechu i te dwa orzechy przełożyć na trzeci talerzyk Taką operację przekładania można powtarzać wybierając za każdym razem albo tę samą parę talerzyków albo inną parę talerzyków. **Jaką najmniejszą liczbę takich przekładań należy wykonać, aby na każdym talerzyku było tyle samo orzechów ?**



POCZĄTEK KATEGORII C1

5 – Wpisać w puste ramki trzy cyfry tak dobrane, aby prawdziwa była równość

$$7\,\square\,7 = \square\;7 \times 7 + 7\square\ ,$$

w której **7** $\square$ **7** będzie liczbą trzycyfrową, a $\square$ **7** i **7** $\square$ będą liczbami dwucyfrowymi.

KONIEC KATEGORII CE

6 – Każdy z pięciu punktów A, B, C, D i E jest połączony odcinkiem z każdym innym punktem tego zbioru punktów. Każdy z odcinków jest narysowany jednym kolorem, czerwonym albo zielonym. Jeżeli wybierzemy dowolne 3 punkty wraz z łączącymi je odcinkami, to zawsze będzie wśród nich odcinek czerwony i zielony. Wiadomo, że punkt A jest połączony z punktami B oraz C odcinkami czerwonymi, zaś z punktem E odcinkiem zielonym. Wiadomo też, że punkt B jest połączony z punktem D odcinkiem czerwonym, a z punktem E odcinkiem zielonym. **Wpisz w Karcie odpowiedzi punkty, z którymi punkt D połączony jest odcinkami zielonymi.**

POCZĄTEK KATEGORII C2, L1, L2, GP, HC

7 – Piotrek wykonał własną nietypową kostkę do gry i na każdej ściance zaznaczył liczby oczek od 1 do 6 w innym porządku niż w zwykłej kostce, gdzie sumy oczek na przeciwległych ściankach są równe 7. Piotrek rzucił swoją kostkę na stół i stwierdził, że na czterech bocznych ściankach leżącej kostki łączna suma oczek jest równa 15. Rzucił swoją kostkę po raz drugi i zauważył, że teraz na czterech bocznych ściankach leżącej kostki łączna suma oczek wynosi 12. **Ile oczek jest na tej ściance kostki Piotrka, która jest równoległa do ścianki zawierającej 6 oczek ?**

8 – Liczby naturalne od 1 do 7 można tak rozmieścić w kwadratach i kółkach (rys. poniżej), aby liczba umieszczona w kółku była zawsze sumą liczb umieszczonych w dwóch kwadratach sąsiadujących z tym kółkiem [3] (4) [1] (6) [5] (7) [2] .

Według tej samej reguły należy rozmieścić dziewięć liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 w kwadratach i kółkach poniższego diagramu

[ ] ( ) [ ] ( ) [ ] ( ) [ ] ( ) [7] ,

w którym liczba 7 została już umieszczona w ostatnim kwadracie.

KONIEC KATEGORII CM

9 – W koszu mamy 100 piłeczek ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi 1, 2, 3, ... , 100 , a na stole mamy rząd siedmiu, ponumerowanych od 1 do 7, pustych pudełek. Wybieramy z kosza po jednej piłeczce o kolejnych numerach 1, 2, 3, ... i zachowując tę kolejność wypełniamy najpierw pudełko nr 1, potem pudełko nr 2 itd... . W końcu wypełniamy pudełko nr 7. Postępujemy jednak tak, aby w każdym pudełku, począwszy od pudełka z numerem 2, liczba piłeczek była o 1 większa od liczby piłeczek w pudełku o numerze o 1 mniejszym. Piłeczka o numerze 26 znalazła się w pudełku nr 3, a piłeczka o numerze 55 w pudełku nr 6 . **Ile piłeczek było w pudełku nr 7 ?**

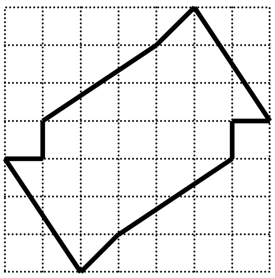
10 – Urodziłem się 15 maja i dziś, tj. 15 maja 2004 obchodzę swoje urodziny. Mam dokładnie tyle lat, ile wynosi suma cyfr roku mojego urodzenia. **Podaj rok mojego urodzenia.**

11 – Agata, która ma w pudełku 15 odważników, po jednym odważniku każdej z wag: 1 g, 2 g, 3 g, ... , 15 g wymyśliła dla swojego brata takie oto zadanie: „Wybierz z pudełka zestaw odważników o możliwie najmniejszej łącznej wadze i tak dobranych, aby z ich pomocą można było odważyć na wadze szalkowej każdą masę, której waga jest liczbą całkowitą, od 1 do 11 gramów, kładąc na lewej i prawej szalce wagi po, co najwyżej, jednym odważniku z wybranego zestawu". **Jaki zestaw odważników wybrał brat Agaty ?** W Karcie odpowiedzi wypisz, w kolejności rosnącej, wagi wybranych odważników.

KONIEC KATEGORII C1

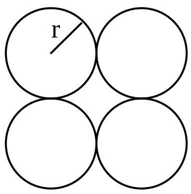
12 – Mamy 27 jednakowych kostek sześciennych, 15 czarnych i 12 białych. Z tych kostek sklejamy sześcienny klocek w taki sposób, aby czarne i białe kwadraty na każdej z sześciu ścian klocka utworzyły konfiguracje dające się nałożyć jedna na drugą przez przesuwanie i ewentualnie przez obracanie. **Narysować konfigurację czarnych i białych kwadratów na ścianie klocka dla dwóch różnych sposobów wykonania tego zadania.** Dwa sposoby uważamy za różne wtedy, gdy odpowiadające im konfiguracje na ścianie klocka nie dają się nałożyć jedna na drugą przez przesuwanie lub obracanie.

13 – Podzielić figurę pokazaną na rysunku obok na 4 jednakowe wielokąty o wierzchołkach w punktach kratowych, dające się nałożyć jeden na drugi przez przesuwanie lub obracanie, ale bez odwracania na drugą stronę. Zaznaczyć bardzo starannie linie podziału na rysunku w Karcie odpowiedzi.



KONIEC KATEGORII C2

14 – Na blacie stolika w kształcie sześciokąta foremnego o boku d ułożono 4 okrągłe podstawki o jednakowym promieniu $r = 21$ cm w taki sposób, że były do siebie styczne i mieściły się w całości na tym blacie. **Jaką długość musi mieć, co najmniej, bok blatu stolika.** Podać dokładny wynik w cm.



15 – W wierzchołkach czworościanu wpisano cztery liczby, a następnie na każdej krawędzi tego czworościanu wpisano liczbę, będącą sumą liczb znajdujących się na końcach tej krawędzi. Okazało się, że suma liczb wpisanych na wszystkich sześciu krawędziach jest równa 3, a suma kwadratów tych liczb jest równa 5. **Obliczyć sumę sześcianów liczb wpisanych na krawędziach rozważanego czworościanu.**

16 – Wewnątrz trapezu ABCD wybieramy punkt O tak, aby suma wektorów $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ i $\overrightarrow{OD}$ była wektorem zerowym. Dodając te wektory w różnej kolejności otrzymujemy różne łamane zamknięte. Spośród wszystkich otrzymanych łamanych wybieramy te, których boki nie przecinają się i obliczamy pola wszystkich czworokątów utworzonych przez te łamane. Wśród otrzymanych pól największe było równe 48 cm^2, a najmniejsze 8 cm^2. **Jakie pole miał trapez ABCD i jaki był stosunek długości dłuższej podstawy do krótszej podstawy tego trapezu ?**

KONIEC KATEGORII L1 i GP

17 – W pewnej grupie każda osoba zna dokładnie 4 inne osoby z tej grupy, każde 2 osoby znające się mają dokładnie dwóch wspólnych znajomych, a każde dwie osoby, które nie znają się mają dokładnie 4 wspólnych znajomych. **Ile osób, co najmniej, musi być w tej grupie ?**

18 – Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n spełniające równanie

$$3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^n$$

W Karcie odpowiedzi podać ile jest takich liczb i wymienić, w kolejności rosnącej, dwie największe .

KONIEC KATEGORII L2 i HC

POWODZENIA !