Paryż zaprasza mistrzów

XVIII Międzynarodowe Mistrzostwa w Grach Matematycznych i Logicznych

II Mistrzostwa Polski w GMiL

– Drugi etap eliminacji 2003/2004

Poniżej zamieszczamy zadania drugiego, korespondencyjnego etapu Mistrzostw, w którym biorą udział tylko uczestnicy I etapu, którzy otrzymali pisemne zawiadomienie o zakwalifikowaniu do II etapu.

Wszystkich innych zachęcamy do próby sił i zabawy intelektualnej przy rozwiązywaniu tych zadań, a w następnej edycji konkursu do wzięcia w nim udziału.

Wykaz kategorii:
CE - uczniowie klas III SP (zadania 1-5),
CM - uczniowie klas IV SP (zadania 3 – 8),
C1 - uczniowie klas V i VI SP (zadania 5 – 11),
C2 - uczniowie gimnazjów (zadania 7 – 13),
L1 - uczniowie szkół ponadgimnazjalnych (zad. 7 – 16),
L2 - studenci i uczniowie szkół pomaturalnych (z. 7 – 18),
HC - zawodowi matematycy i informatycy (zadania 7 – 18),
GP - dorośli, spoza kategorii L2 oraz HC (zadania 7 – 16).

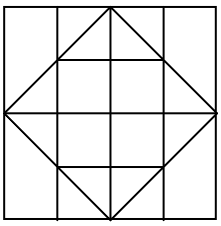
Komitet Organizacyjny Mistrzostw

Zadania II etapu eliminacji 2003/2004

POCZĄTEK KATEGORII CE

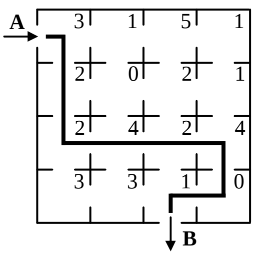
1 – Odwiedziny koleżanek. Agnieszka, Celina i Dominika mieszkają w tym samym pionie budynku, który ma 5 kondygnacji (tzn. parter i cztery piętra). Dominika chcąc odwiedzić Agnieszkę musi wejść, po schodach, dwa piętra, a jeśli chce odwiedzić Celinę, to schodzi w dół. **Na którym piętrze mieszka Dominika, jeżeli wiadomo, że Celina nie mieszka na parterze?**

2 - Kwadraty. Ile jest wszystkich kwadratów, których boki leżą na liniach narysowanej obok figury?



POCZĄTEK KATEGORII CM

3 – Labirynt. Przy prawidłowym przejściu przez labirynt od wejścia A do wyjścia B, Tomek nie może dwukrotnie znaleźć się w tej samej sali. Za prawidłowe przejście przez labirynt otrzymuje on tyle samo cukierków ile wynosi suma numerów odwiedzanych sal.

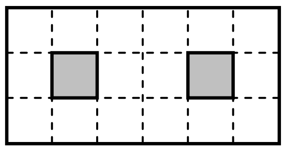


Zaznacz w Karcie odpowiedzi trzy prawidłowe przejścia, z których każde nagrodzone będzie 13 cukierkami. Uwaga: na rysunku zaznaczono prawidłowe przejście nagrodzone 18 cukierkami.

4 – Pożyczka. Marek mówi do Jarka:
- „Pożycz mi 96 groszy”,
- „Nie mam tyle” - odpowiada Jarek,
- „A ile masz ? ” - pyta dalej Marek,
Odpowiem ci w zagadkowy sposób - mówi Jarek:
- „Gdybym miał dwa razy tyle groszy ile mam teraz, to po wręczeniu tobie kwoty, o którą prosisz, pozostałoby mi dokładnie tyle, ile teraz brakuje mi, aby spełnić twoją prośbę”.
Ile groszy ma Jarek?

POCZĄTEK KATEGORII C1

5 – Dziurawy prostokąt. Papierowy prostokąt z wyciętymi dwoma otworami należy podzielić na możliwie najmniejszą liczbę części tak, aby można było z tych części zbudować kwadrat. Otrzymane z podziału części można przesuwać po płaszczyźnie i obracać, ale nie można ich odwracać na drugą stronę. **Podać dwa różne podziały o minimalnej liczbie części, zaznaczając linie podziału na rysunkach w Karcie odpowiedzi.** Przyjmujemy, że dwa podziały są różne, jeżeli przynajmniej jedna z części występująca w jednym podziale nie występuje w drugim. Uwaga: Prostokąt należy ciąć wzdłuż wskazanych, na rysunku, linii przerywanych.



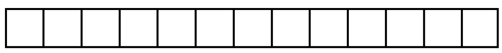
KONIEC KATEGORII CE

6 – Podział czekolad. Grupa złożona z 6 chłopców otrzymała do podziału 7 jednakowych 150 gramowych tabliczek czekolady. Przy podziale tym muszą być spełnione 3 warunki:
1. Porcje przeznaczone dla każdego z chłopców muszą być tej samej wagi.
2. Chłopcy mogą rozłamać tabliczkę czekolady, ale tylko na dwie części.
3. Liczba rozłamanych czekolad musi być możliwie najmniejsza.

Jak sprytni chłopcy uporali się z tym problemem? W Karcie odpowiedzi podać, ile tabliczek chłopcy rozłamali, a ponadto każdą rozłamaną czekoladę podzielić pionową kreską i wpisać wagi, w gramach, powstałych części. Prostokąty przedstawiające nierozłamane czekolady pozostawić puste.

POCZĄTEK KATEGORII C2, L1, L2, GP, HC

7 – Finał konkursu. W finale konkursu matematycznego, jedno z zadań miało następującą treść:
„W kratki taśmy wpisać, w porządku rosnącym, 13 różnych

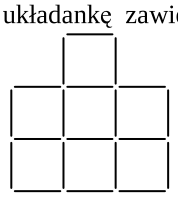


liczb całkowitych dodatnich, których suma wynosi 94”. Każdy finalista znalazł rozwiązanie spełniające warunek zadania, ale każdy podał inny wynik. **Ilu uczniów – co najwyżej – brało udział w tym finale? Podaj jedno z możliwych rozwiązań tego zadania.**

8 – Odważniki. Mamy zestaw złożony z 7 odważników, których wagi, wyrażone w gramach, są liczbami całkowitymi. Wiadomo, że wśród tych odważników jest co najmniej jeden o wadze 1 g oraz co najmniej jeden o wadze 13 g. Wiadomo też, że jeśli z tego zestawu usuniemy jeden z odważników, wybrany dowolnie, to pozostałe 6 odważników można zawsze podzielić na dwie grupy równoważące się na wadze szalkowej. **Jaka może być minimalna waga takiego zestawu odważników? Podać też przykład zestawu odważników, którego łączna waga jest minimalna.**

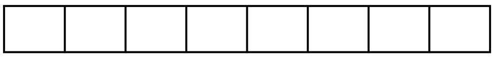
KONIEC KATEGORII CM

9 – Układanka z zapałek. Z 20 zapałek zbudowano układankę zawierającą 7 kwadratów, z których każdy ma brzeg utworzony z 4 zapałek (rysunek obok). **Jaką najmniejszą liczbę zapałek trzeba przełożyć na inne miejsca, aby z tych samych 20 zapałek powstała nowa układanka złożona z 5 kwadratów, takich samych jak w poprzedniej układance?** Na podanej figurze, w Karcie odpowiedzi, narysować pogrubionymi liniami zapałki pozostawione na swoich miejscach oraz dorysować zapałki przełożone na inne miejsca. Każdą zapałkę przedstawić odcinkiem.



10 – Tajemnicza liczba. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n, która powiększona o iloczyn swoich cyfr daje liczbę większą od n, napisaną za pomocą tych samych cyfr co liczba n, ale nie w tej samej kolejności.

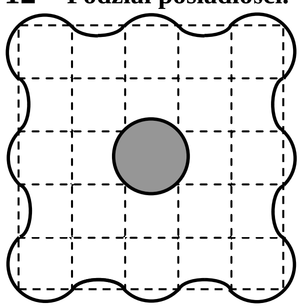
11 – Zagadkowa ósemka. W kratki taśmy należy wpisać



osiem różnych liczb całkowitych dodatnich tak, aby suma każdych dwóch liczb sąsiadujących była liczbą parzystą, suma każdych trzech liczb następujących po sobie była podzielna przez 3, suma każdych czterech liczb następujących po sobie była podzielna przez 4, itd., ... , i wreszcie, suma wszystkich ośmiu liczb była podzielna przez 8, a ponadto tak, by suma tych 8 liczb była najmniejszą z możliwych.

KONIEC KATEGORII C1

12 – Podział posiadłości. Na rysunku obok pokazany jest plan posiadłości z centralnie umieszczonym stawem. Tę część posiadłości, która nie obejmuje stawu, należy podzielić na 6 części w taki sposób, aby każda z nich dała się nałożyć na każdą inną za pomocą przesuwania lub obracania, ale bez odwracania na drugą stronę.

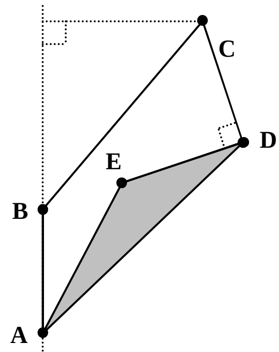


Linie podziału zaznaczyć na rysunku w Karcie odpowiedzi.

13 – Trójkąt i koła. W trójkącie prostokątnym promień koła wpisanego r = 5 cm, a odległość pomiędzy środkami kół, wpisanego w ten trójkąt i opisanego na tym trójkącie d = 12 cm. **Obliczyć obwód i pole tego trójkąta.**

KONIEC KATEGORII C2

14 – U pana Karpiowskiego. Gospodarstwo pana Karpiowskiego jest czworokątem ABCD (rys. obok), w którym część trójkątna AED jest sztucznym stawem rybnym. Bok AB tego gospodarstwa ma długość 240 m, wierzchołek C jest odległy od prostej przechodzącej przez wierzchołki A i B o 320 m, wewnętrzny kąt $\angle$ ABC jest rozwarty. Punkty B, E i D leżą na jednej prostej i współliniowe są także punkty A, E i C. Odcinki ED DC są równe i tworzą kąt prosty, a trójkątny staw ma powierzchnię 31680 m^2. **Jaką powierzchnię ma pozostała część gospodarstwa pana Karpiowskiego?** Podać wynik dokładny w m^2.



15 – Suma ułamków. Niech d(n) oznacza liczbę naturalną leżącą na osi liczbowej najbliżej liczby $\sqrt{n}$, n = 1, 2, ... **Obliczyć sumę**

$$\frac{1}{d(1)} + \frac{2}{d(2)} + \dots + \frac{2004}{d(2004)}$$

16 – Kryptarytm. W kryptarytmie

$$\text{NINE} \times \text{THREE} = \text{NEUF} \times \text{TROIS}$$

zaszyfrowane są dwie liczby naturalne czterocyfrowe i dwie pięciocyfrowe zapisane w układzie dziesiątkowym. Słowa NINE i TROIS przedstawiają liczby podzielne przez 3, a słowa THREE i NEUF przedstawiają liczby podzielne przez 9. Różne litery zastępują różne cyfry, a różne cyfry zostały zastąpione przez różne litery. **Znaleźć liczby NINE i THREE oraz ich iloczyn.**

KONIEC KATEGORII L1 i GP

17 – Mini-max. Liczbę 1 przedstawiamy jako sumę $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ czterech dodatnich składników x_1 , x_2 , x_3 i x_4, a następnie dla każdego takiego przedstawienia wybieramy największą z czterech liczb

$$\frac{x_1}{1 + x_1}, \quad \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, \quad \frac{x_3}{1 + x_1 + x_2 + x_3}, \quad \frac{x_4}{1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$$

i tak wybraną liczbę oznaczamy przez $S(x_1, x_2, x_3, x_4)$. **Znaleźć min $S(x_1, x_2, x_3, x_4)$ i podać wartości liczb x_1, x_2, x_3 i x_4 realizujących to minimum.**

18 – Potęgowa parzystość. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których $31^n - 1$ dzieli się bez reszty przez 2^n.

KONIEC KATEGORII L2 i HC